

## 4. İyisıralamaları Hissetmek

İyisıralamayı koyun sıralamaya benzetmek pek yanlış olmaz. Sonsuz sayıda koyun da olsa, iyisıralanmış bir koyun sürüsünde mutlaka birinci koyun olmalı. İkinci, üçüncü, dördüncü koyun da... Son koyun dışında (eğer varsa öyle bir koyun!), her koyundan hemen sonra gelen bir koyun olmalı. Dahası, sürü öyle sıralanmalı, yani koyunlar öyle numaralanmalı ki, her altsürüde numarası en küçük bir koyun olsun... İşte bu son özelliği sağlayan sıralamalara *iyisıralama* denir.

Sonlu bir sürüyü iyisıralamak marifet sayılmaz, bunu mühendisler bile yapar. Az sonsuz (örneğin doğal sayılar kadar sonsuz olan) sürüleri iyisıralamak da marifet sayılmaz. Marifet, çok sonsuz (örneğin gerçel sayılar kadar olan) sürüleri iyisıralamakta. Bu ve bundan sonraki birkaç bölümün ana sorularından biri de işte bu: Bir sürü ne kadar büyük olursa olsun iyisıralanabilir mi?

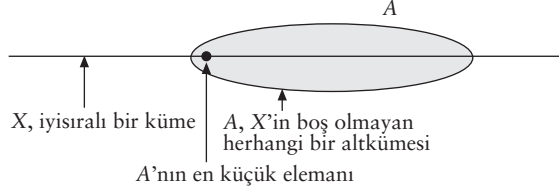
Şu teoremi biliyoruz [Sİ]:

**Teorem 4.1.**  $\mathbb{N}$ 'nin boş olmayan her atkümesinin bir en küçük elemanı vardır.

**4.1. İyisıralama.**  $(\mathbb{N}, <)$  sıralamasında olduğu gibi, boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı olduğu sıralamalara *iyisıralama* denir. Yani bir  $(X, <)$  sıralamasının iyi sıralama olması için,

**İS.** Her  $\emptyset \neq A \subseteq X$  altkümesi için, öyle bir  $a \in A$  vardır ki her  $x \in A$  için  $a \leq x$  olur

özelliğinin sağlanması gerekir.

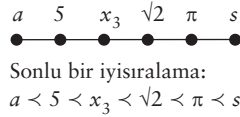


İS özelliğini sağlayan  $(X, <)$  sıralamalarına *iyisıralama* denir.  $X$ 'e de  $<$  sıralamasıyla *iyisıralanmıştır* denir.

Tanımdan hemen anlaşılacağı üzere, bir iyisıralamanın her altkümesi de bir iyisıralamadır, yani  $(X, <)$  bir iyisıralamaysa ve  $Y \subseteq X$  ise,  $(Y, <)$  de bir iyisıralamadır; sonuçta,  $Y$ 'nin her altkümesi  $X$ 'in de bir altkümesidir.

İyisıralı kümeler tamsıralıdır, yani iyisıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir. Nitekim, eğer  $x$  ve  $y$  iyisıralı bir kümenin iki elemanıysa ve İS özelliğinde  $A = \{x, y\}$  alırsak,  $x$  ve  $y$ 'den birinin diğerinden küçüğeşit olduğunu görürüz.

Sonlu her tamsıralama iyisıralama olmak zorundadır elbette.

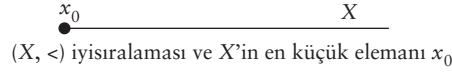


Doğal sayılar kümesi  $\mathbb{N}$ 'nin doğal sıralamasıyla birlikte bir iyisıralama olduğunu gördük. Doğal sıralamayla iyisıralanmış bir küme olarak görüldüğünde  $\mathbb{N}$  yerine  $\omega$  (omega, Yunan alfabesinin son harfi) yazmak bir gelenektir; biz de bundan böyle  $\mathbb{N}$  yerine sık sık  $\omega$  yazacağız.

Bu bölümde iyisıralamaları biraz olsun anlamaya çalışacağız.  $(X, <)$  herhangi bir iyisıralama olsun.

Eğer  $X = \emptyset$  ise söylenecek fazla bir şey yok, boşküme hakkında ne söylenebilirse, bu iyisıralama hakkında da o kadar söylenebilir.

Eğer  $X \neq \emptyset$  ise, o zaman İS özelliğinde  $A = X$  alarak,  $X$ 'in bir en küçük elemanı olduğunu görürüz.  $X$ 'in bu en küçük elemanına  $x_0$  diyelim. (Demek ki boş olmayan her iyi sıralamanın bir en küçük elemanı vardır.)



Şimdi  $X \setminus \{x_0\}$  kümesine bakalım. Eğer bu küme boşsa, o zaman  $X$  sadece  $x_0$  elemanından oluşmuştur ve gene söyleyecek fazla bir şey olamaz. Eğer  $X \setminus \{x_0\}$  kümesi boş değilse, o zaman İS özelliğinde  $A = X \setminus \{x_0\}$  alalım ve bu kümenin en küçük elemanına  $x_1$  diyelim.  $x_1, x_0$ 'dan sonra gelen ilk elemandır.



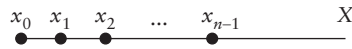
Eğer  $X = \{x_0, x_1\}$  ise,  $X$  iyisıralaması için tek söyleyebileceğimiz şey,  $x_0$ 'ın  $x_1$ 'den küçük olduğudur. Diyelim  $X$  sadece bu iki elemandan ibaret değil. O zaman  $X \setminus \{x_0, x_1\}$  kümesi boş olmadığından, İS özelliğine göre bu kümenin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana  $x_2$  diyelim.  $x_2, x_1$ 'den sonra gelen ilk elemandır.



Bunu böylece sürdürebiliriz.  $n$ -inci aşamada,  $X$ 'in en küçük ilk  $n$  elemanını bulduk diyelim. Bu elemanlara (sırasıyla!)

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

diyelim.



Şimdi,

$$X_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

tanımını yapalım. Demek ki

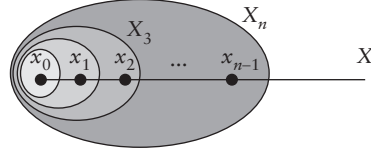
$$X_0 = \emptyset,$$

$$X_1 = \{x_0\}$$

$$X_2 = \{x_0, x_1\}$$

$$X_3 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

vb.



Eğer  $X \neq X_n$  ise, yani  $X \setminus X_n \neq \emptyset$  ise, o zaman İS özelliğine göre  $X \setminus X_n$  kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana  $x_n$  diyelim.  $x_n, x_{n-1}$ 'den sonra gelen ilk elemandır.

$X$ 'in tüm elemanlarını bu yöntemle sonlu bir zaman sonra tüketirsek, yani belli bir  $n$  doğal sayısı için,

$$X = X_n = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$$

ise, o zaman  $X$  sonlu bir kümedir (tam  $n$  elemanı vardır) ve sıralaması doğal sıralanmış

$$\{0, 1, \dots, 2, n-1\}$$

kümesinden pek farklı değildir. Doğal sıralanmış

$$\{0, 1, \dots, 2, n-1\}$$

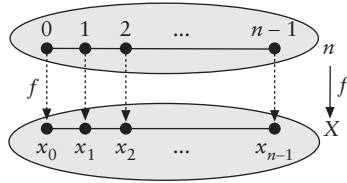
kümesinin  $n$  olarak simgelenmesi okuru şaşırtmamalı [Sİ]:

$$n = \{0, 1, \dots, 2, n-1\}$$

ve

$$0 < 1 < \dots < n-1.$$

$X$ 'in sonlu tane, diyelim  $n$  tane elemanı varsa, yukarda da dediğimiz gibi,  $X$  iyisıralaması aynen  $n$  iyisıralanmasına benzer, elemanların adlarından başka aralarında bir fark yoktur. Daha matematiksel deyişle  $n$ 'den  $X$ 'e giden ve sıralamayı koruyan (yani sürekli artan) bir  $f$  eşlemesi vardır. Bu  $f$  eşlemesi  $i$  sa-



Eğer  $X$ 'in  $n$  elemanı varsa,  $X \approx n$

yısını  $x_i$  elemanına götürür, yani her  $i < n$  için,  $f(i) = x_i$ 'dir. (Burada  $x_i$ ,  $X$ 'in  $i$ -inci elemanıdır.)

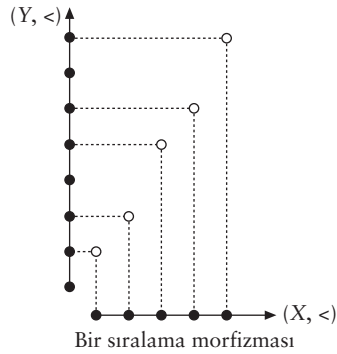
Sıralamayı bozmayan fonksiyonlara *eşyapı fonksiyonu* ya da *sıralama morfizması* adı verilir, kısaca *morfizma* dendiği de olur. Matematiksel tanım şöyle:  $(X, <)$  ve  $(Y, <)$  birer iyisıralama olsunlar ve  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonu, her  $x_1, x_2 \in X$  için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlasın. O zaman  $f$ 'ye *sıralama morfizması* adı verilir. Okullarda sıralama morfizması daha çok *artan fonksiyon* adıyla anılır.

İyisıralanmış kümeler üzerine sıralama morfizmaları birebir olmak zorundadır, çünkü iyisıralı bir küme tamsıralıdır. Nitekim,  $f(x_1) = f(x_2)$  ise ne  $x_1 < x_2$  ne de  $x_2 < x_1$  doğru olabilir, dolayısıyla, tamsıralamadan dolayı,  $x_1 = x_2$  olmalı.

Eğer  $f$  sıralama morfizması ayrıca örtense, o zaman  $f$ 'ye *sıralama eşlemesi* denir. Aralarında bir eşyapı eşlemesi olan  $(X, <)$  ve  $(Y, <)$  iyisıralamalarına *eşyapısal* (ya da *izomorfik*) denir ve bu olgu  $(X, <) \approx (Y, <)$  ya da kısaca  $X \approx Y$  olarak gösterilir.



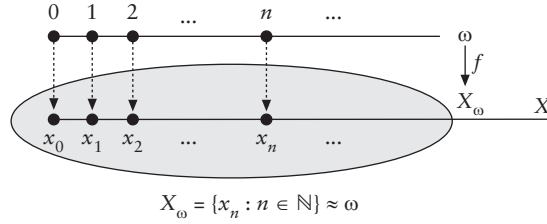
Demek ki tam  $n$  tane elemanı olan iyisıralı bir kümeyle

$$n = \{0, 1, \dots, 2, n - 1\}$$

iyisıralaması eşyapısaldır. Böylece sonlu iyisıralamaları anlamış olduk. Sıra geldi sonsuz iyisıralamalara...

Bundan böyle  $X$  sonlu olmasın. O zaman her  $n$  doğal sayısı için  $X$ 'in  $n$ -inci elemanı vardır. Bu elemana  $x_n$  demiştik, demeye de devam edeceğiz.

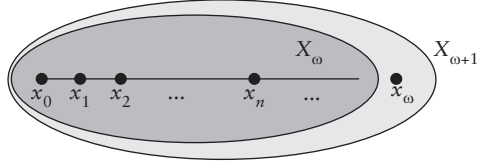
Bu  $x_n$  elemanlarından ( $n \in \mathbb{N}$ ) oluşan kümeyle  $X_\omega$  adını verelim.  $X_\omega$ 'nın aynen  $\mathbb{N}$ 'ye (daha doğrusu  $\omega$ 'ya) benzediğini okur anlamıştır herhalde, yani  $X_\omega$  ile  $\omega$  (yani doğal sayılar kümesi  $\mathbb{N}$ ) arasında bir sıralama eşlemesi vardır:  $X_\omega \approx \omega$ .



**Not:**  $X_\omega$ 'nın gerçekten bir küme olduğu pek bariz olmayabilir. [SI] ders notlarımızda kümeler kuramının birkaç basit aksiyomunu vermiştik. Bu aksiyomlara dayanarak  $X_\omega$ 'nın küme olduğunu kanıtlayabiliriz:  $\varphi(x)$  şu özellik olsun: “ $\{y \in X : y < x\}$  kümesiyle bir doğal sayısı arasında bir eşleme var.”  $X_\omega = \{x \in X : \varphi(x)\}$  eşitliğinden dolayı,  $X_\omega$  bir kümedir. (Tanımlanabilir Alt-küme Aksiyomu, [SI].)

İki seçenek var. Ya  $X = X_\omega \approx \omega$  ya da  $X \neq X_\omega$ . Birinci şıkta  $X$ 'in neye benzediği belli,  $\omega$ 'ya benzer. İkinci şıkta yoğunlaşalım. O zaman  $X \setminus X_\omega$  boşküme değildir, dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana  $x_\omega$  diyelim.  $x_\omega$  elemanı daha önce bulduğumuz bütün  $x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) elemanlarından **hemen** sonra gelen **ilk** elemandır, yani  $x_\omega$  elemanı, her  $n$  doğal sayısı için,  $x_n < x_\omega$  eşitsizliğini sağlayan  $X$ 'in en küçük elemanıdır.

$X_{\omega+1} = X_{\omega} \cup \{x_{\omega}\}$  olsun. Burada  $\omega+1$  simgesine özel bir anlam vermeye çalışmayın,  $\omega+1$ 'i daha sonra tanımlayacağız. Şimdilik  $\omega+1$  simgesini tek bir simge gibi algılayıp  $X_{\omega+1}$  iyisıralamasına yoğunlaşın:  $X_{\omega+1}$  iyisıralaması,  $X_{\omega}$  iyisıralamasının “sonuna”  $x_{\omega}$  elemanı eklenerek elde edilmiştir.

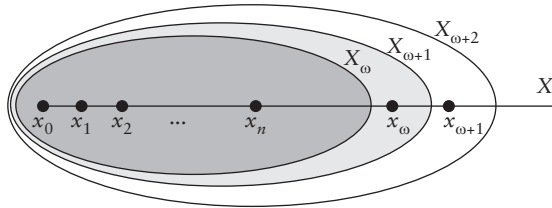


Eğer  $x_{\omega}$ ,  $X$ 'in son elemanıysa, yani  $X$ 'te  $x_n$ 'lerden ve  $x_{\omega}$ 'dan başka eleman kalmamışsa, o zaman  $X = X_{\omega} \cup \{x_{\omega}\} = X_{\omega+1}$ 'dir. Bu durumda,  $X$ 'i ve sıralamasını anladık:  $X$ , sonuna bir eleman eklenen  $\omega$ 'ya benziyor. (Bir sonraki bölümde bir iyisıralamanın sonuna bir eleman eklemenin ne demek olduğunu daha ayrıntılı bir biçimde anlatacağız.)

Eğer  $x_{\omega}$ ,  $X$ 'in son elemanı değilse, yani  $X \neq X_{\omega+1}$  ise, o zaman  $X \setminus X_{\omega+1} \neq \emptyset$  olur ve  $X \setminus X_{\omega+1}$  kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana, tahmin edeceğimiz gibi,  $x_{\omega+1}$  diyelim.  $x_{\omega+1}$ ,  $x_{\omega}$ 'dan sonra gelen ilk elemandır. Gene tahmin edeceğimiz gibi

$$X_{\omega+2} = X_{\omega+1} \cup \{x_{\omega+1}\} = X_{\omega} \cup \{x_{\omega}, x_{\omega+1}\}$$

olsun.



Genel olarak, bir  $n$  doğal sayısı için,  $X$ 'in

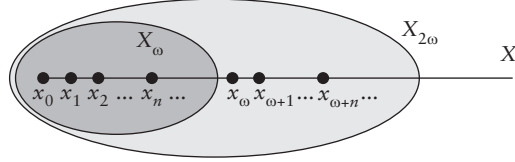
$$X_{\omega+n} = X_{\omega} \cup \{x_{\omega}, x_{\omega+1}, \dots, x_{\omega+n-1}\}$$

altkümesini bulduğumuzu varsayalım. Eğer belli bir  $n$  doğal sayısı için  $X = X_{\omega+n}$  ise ne âlâ,  $X$ 'i anladık demektir. Eğer  $X_{\omega+n} \neq X$

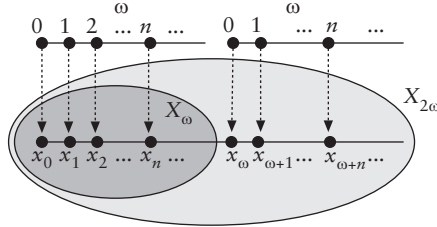
ise  $X \setminus X_{\omega+n}$  kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana  $x_{\omega+n}$  diyelim. Eğer hiçbir  $n$  doğal sayısı için  $X \neq X_{\omega+n}$  ise o zaman bu yöntemle  $X$ 'i tüketemeyiz ve sürekli  $x_{\omega+n}$  elemanlarını buluruz.

$$X_{2\omega} = X_{\omega} \cup \{x_{\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

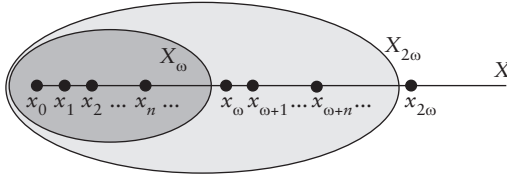
olsun.



$X_{2\omega}$  sıralamasının nasıl bir sıralama olduğu belli. Başında  $\omega$  (yani  $\mathbb{N}$ ) iyisıralaması var. Bir de sonunda **ayrı** bir  $\omega$  var. Demek ki  $X_{2\omega}$ ,  $\omega$ 'nın (yani doğal sayılar kümesinin) iki ayrık kopyasından oluşuyor, biri başında (küçükler), diğeri sonunda (büyükler).



Eğer  $X = X_{2\omega}$  ise, işimiz bitti, o zaman  $X$ 'i ve iyisıralamasını anladık. Eğer  $X \neq X_{2\omega}$  ise, o zaman  $X \setminus X_{2\omega}$  kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana  $x_{2\omega}$  diyelim.

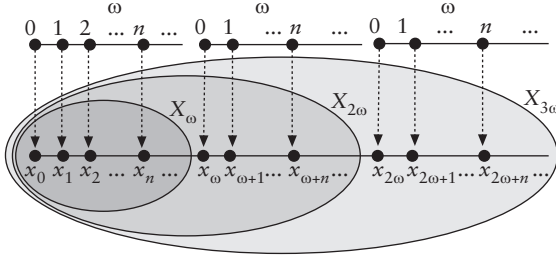




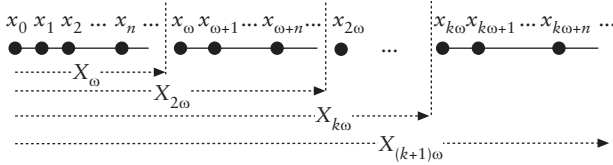
Bunu böylece sürdürebiliriz.  $X$ 'te  $x_{2\omega}$ 'dan daha büyük bir eleman varsa,  $x_{2\omega}$ 'dan daha büyük elemanların en küçüğüne  $x_{2\omega+1}$  diyelim. Varsa, malum yöntemle  $x_{2\omega+2}$ ,  $x_{2\omega+3}$ , ... elemanlarını bulalım. Eğer  $X$ 'in sonuna varırsak işimiz biter. Yoksa,

$$X_{3\omega} = X_{2\omega} \cup \{x_{2\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Eğer  $X = X_{3\omega}$  ise o zaman  $X$ ,  $\omega$ 'nın üç kopyasından oluşuyor demektir: küçük kopya, ortanca kopya, üçüncü kopya.



Kendimizi biraz fazla tekrarlamaya başladık...  $k$ -inci seviyeye kadar, yani  $X_{k\omega}$ 'ya kadar geldiğimizi varsayalım.  $X_{k\omega}$ , sıralama olarak  $\omega$ 'nın  $k$  tane kopyasına benzer: 1'inci kopya, 2'inci kopya, ...,  $k$ -inci kopya. Her kopya kendi içinde doğal sıralanmıştır ve her kopyanın tüm elemanları daha sonraki kopyaların tüm elemanlarından daha küçüktür. Örneğin üçüncü



kopyanın 25'i, dördüncü kopyanın 2'sinden daha küçüktür.

Eğer  $X_{k\omega} = X$  ise işimiz bitti. Yoksa  $X \setminus X_{k\omega}$  kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana  $x_{k\omega}$  diyelim.  $x_{k\omega}$ 'dan hemen sonra gelen elemana  $x_{k\omega+1}$  diyelim. (Eğer  $x_{k\omega}$ ,  $X$ 'in en büyük elemanı değilse böyle bir eleman vardır.) Devam edip  $x_{k\omega+2}$ ,  $x_{k\omega+3}$ , ... elemanlarını da (varsa!) bulabiliriz.  $X$ 'te ele-

man kaldığı sürece devam edelim. Eğer  $x_{k\omega+n}$  elemanlarının hiç-biri  $X$ 'in en büyük elemanı değilse ( $k$  sabit,  $n$  değişiyor) bu yöntemi hiç durmadan sürdürebiliriz.  $X_{(k+1)\omega}$  şimdiye kadar bulduğumuz tüm elemanların kümesi olsun. ( $X_{(k+1)\omega}$  bir kümedir, güvenin bana!) Eğer  $X = X_{(k+1)\omega}$  ise, durmak zorundayız ve bu durumdan pek yakınmıyoruz herhalde. Ama eğer  $X \neq X_{(k+1)\omega}$  ise, o zaman boş olmayan  $X \setminus X_{(k+1)\omega}$  kümesinin en küçük elemanına  $x_{(k+1)\omega}$  diyelim ve mümkün olduğu sürece bu yöntemle yolumuza devam edelim. Böylece her  $k$  doğal sayısı için  $X_{k\omega}$  kümelerini elde ettiğimizi ama  $X$ 'in bu yöntemle tükenmediğini varsayalım.

$X_{\omega^2}$ , tüm bu  $X_{k\omega}$  kümelerinin bileşimi olsun:

$$X_{\omega^2} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_{k\omega}.$$

**Alıştırma:**  $X_{\omega^2}$  topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. ( $X$ 'in iyisıralı bir küme olduğunu kullanabilirsiniz.)

Eğer  $X_{\omega^2} = X$  ise sorun yok. Eğer  $X_{\omega^2} \neq X$  ise  $X \setminus X_{\omega^2}$  kümesinin en küçük elemanına  $x_{\omega^2}$  diyelim.  $X_{\omega^2+1} = X_{\omega^2} \cup \{x_{\omega^2}\}$  olsun.

Eğer  $X$ 'te başka eleman kalmamışsa o zaman  $X = X_{\omega^2+1}$ 'dir. Kalmışsa,  $x_{\omega^2}$ 'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana  $x_{\omega^2+1}$  adını verelim. Eğer  $X$ 'in elemanları bitmezse,  $X$ 'in

$$x_{\omega^2+1}, x_{\omega^2+2}, x_{\omega^2+3}, x_{\omega^2+4}, \dots$$

elemanlarını bulabiliriz.

$X_{\omega^2+\omega}$  kümesi  $X$ 'in şimdiye kadar bulabildiğimiz tüm elemanlarından oluşsun.

$$x_{\omega^2+\omega}, x_{\omega^2+\omega+1}, x_{\omega^2+\omega+2}, x_{\omega^2+\omega+3}, \dots$$

elemanlarının nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir: Her biri bir öncekinden hemen sonra gelen elemandır. Bu  $x_{\omega^2+\omega+k}$  elemanlarının sonu gelmiyorsa, tüm bu elemanlar kümesine  $X_{\omega^2+2\omega}$  diyelim.

Okur herhalde, eğer  $X$  tükenmezse,

$$X_{\omega^2+3\omega}, X_{\omega^2+4\omega}, X_{\omega^2+5\omega}, \dots$$

kümelerinin nasıl bulduklarını anlamıştır. Bunların bileşimine  $X_{2\omega^2}$  diyelim. Gidebildiğimiz kadar gidelim. Eğer  $X$  tükenmezse, sırayla

$$X_{2\omega^2}, X_{3\omega^2}, X_{4\omega^2}, \dots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların bileşimine de  $X_{\omega^3}$  diyelim. Eğer  $X$  daha önce tükenmezse,  $X$ 'in

$$X_{\omega^3}, X_{\omega^4}, X_{\omega^5}, \dots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların bileşimine de  $X_{\omega^\omega}$  diyelim.

Ardından sırayla  $X_{\omega^\omega}, X_{2\omega^\omega}, X_{3\omega^\omega}, \dots$  altkümelerini de bulabiliriz. Bunların bileşimine  $X_{\omega^{\omega^\omega}}$ , ya da  $X_{\omega^{\omega+1}}$  diyelim. Bundan sonra  $X_{\omega^{\omega+2}}, X_{\omega^{\omega+3}}, X_{\omega^{\omega+4}}$  altkümeleri (başlangıç dilimleri) bulunur. Devam edelim ve tüm bu altkümelerin bileşimine  $X_{\omega^{\omega+\omega}}$  ya da  $X_{\omega^{2\omega}}$  diyelim. Devam edelim. Sırayla  $X_{\omega^{3\omega}}, X_{\omega^{4\omega}}, X_{\omega^{4\omega}}, \dots$  altkümelerini de bulruuz. Bunların bileşimine  $X_{\omega^{\omega\omega}}$  ya da  $X_{\omega^{\omega^2}}$  diyelim. Eğer  $X$ 'i hala daha bitirememişsek,  $X_{\omega^{\omega^3}}, X_{\omega^{\omega^4}}, X_{\omega^{\omega^5}}, \dots$  altkümelerini de bulabiliriz. Bunların bileşimine  $X_{\omega^{\omega^\omega}}$  diyelim.  $X$ 'in hala daha bitmediğini varsayalım.

$$\alpha_1 = \omega,$$

$$\alpha_2 = \omega^\omega,$$

$$\alpha_3 = \omega^{\omega^\omega},$$

$$\alpha_4 = \omega^{\omega^{\omega^\omega}},$$

$$\alpha_5 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$$

olsun. Genel olarak,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$$

olarak tanımlansın ( $\alpha_n^\omega$  olarak değil!) Bu tanımlar şimdilik biçimsel, yani  $\alpha_n$ 'ler anlamsız şeyler.  $\alpha_n$ 'leri göstergeç (endis, indeks) olarak kullanacağız.  $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}$  altkümelerinin nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir. Eğer  $X$  izin verirse, devam edip, her  $n \in \mathbb{N}$  için,  $X$ 'in  $X_{\alpha_n}$  altkümelerini de bulabiliriz.  $X$ 'in hiç bitmediğini varsayarak,  $X_{\alpha_n}$  altkümelerinin bileşimine  $X_{\varepsilon_0}$  diyelim.

$X$ 'te yer kalmışsa devam edebiliriz. İsteyen devam etsin. Ben sıkıldım.

**İmkânsız Uğraş.** Okur, konunun zevkine daha çok varmak için doğal sayılar kümesinin altkümelerinin kümesi olan  $\wp(\mathbb{N})$ 'nin bir iyisıralamasını bulmaya çalışmalıdır. En az yarım saat kadar. En fazla da bir saat... Bir saati aşmasın çünkü - önceden söyleyelim - başaramayacaktır.  $\wp(\mathbb{N})$ 'nin bir iyisıralaması bulunamaz ama vardır.  $\wp(\mathbb{N})$ 'nin iyisıralanabileceğini (iyisıralamayayı bulamadan) ilerde yeni aksiyom yardımıyla kanıtlayacağız.