1. Her Şey Sıralanamaz

"Ahmet, Belgün'den daha uzun boyluysa, Belgün de Cemal'den daha uzun boyluysa, Ahmet, Cemal'den daha uzun boyludur," önermesi hiç kuşkusuz doğrudur. Çünkü $A < B$ ve $B < C$ eşitsizliklerinden, $A < C$ eşitsizliği çıkar.

Şu önermeyi ele alalım şimdi: "Ahmet, Belgün'den daha iyi satranç oynuyorsa ve Belgün de Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, Ahmet, Cemal'den daha iyi satranç oynuyordur."

Bu önerme doğru mudur? Ahmet gerçekten Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, önerme doğrudur elbet. Ama genel olarak, herhangi üç kişi için doğru mudur bu önerme? Bir başka deyişle, *A*, *B* ve *C* herhangi üç kişiyi simgeliyorsa, *A*, *B*'den, *B* de *C*'den daha iyi satranç oynuyorsa, *A*, *C*'den daha iyi satranç oynuyor diyebilir miyiz?

Satranç analizi zor bir oyun. Satranç oynamak yerine zar atalım.

1.1. Bir Zar Oyunu. *A* ve *B* diye adlandıracağımız iki zarın altı yüzünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	4	5	7	9	12
B:	2	3	6	8	10	11

Bu iki zar birbiriyle "en yüksek sayıyı atma" oyunu oynasa, hangisi daha çok kazanır, yani hangi zarın kazanma olasılığı daha yüksektir? Bu soruyu yanıtlamak için gelebilecek zarları bir tabloyla gösterelim.

	1	**4**	**5**	**7**	**9**	**12**
2	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
3	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
6	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*
8	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*
10	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*
11	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*

Örneğin, *A*'ya 9, *B*'ye 3 geldiği durumu beşinci sütunla ikinci sıranın kesiştiği yerde (gölgelenmiş karede) gösterdik. *A*'nın *B*'yi yendiği zar atışlarını *A* ile, *B*'nin *A*'yı yendiği zar atışlarını *B* ile gösterdik.

Sayıldığında görüleceği gibi, *B*, *A*'yı 19 kez yeniyor. Demek ki *B*'nin *A*'yı yenme olasılığı 19/36'dır. Ve elbet, *A*'nın *B*'yi yenme olasılığı 17/36'dır[1].

Dolayısıyla iki zardan birini seçmek gerekirse *B* zarını seçmeliyiz, çünkü *B* zarıyla kazanma olasılığımızı artırmış oluruz. Bu oyunu *B* zarıyla (*A* zarına karşı) 36 milyon kez oynayacak olsak, aşağı yukarı 19 milyonunda kazanırız, geriye kalan 17 milyonunda kaybederiz. Sonuç olarak *B* zarı *A* zarından daha iyidir.

Bu kez üç zarımız olsun: *A*, *B* ve *C* zarları. Ve zarların üstünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	5	6	10	13	18
B:	2	3	7	11	16	17
C:	4	8	9	12	14	15

Bu zarlarla *C*, *B*'yi 20/36 olasılıkla yener (hesapları okura bırakıyorum.) *B* de *A*'yı 19/36 olasılıkla yener. Demek ki *C* zarı *B* zarından ve *B* zarı *A* zarından daha iyidir. En iyi zarın *C*

1 Eşitlik (yenişememek) olmadığından, bu iki olasılığın toplamı 1 olmalıdır.

olduğu sonucuna varabilir miyiz?

C'yle *A*'yı birbirleriyle kapıştıracak olursak, *C*'nin *A*'yı gerçekten de 21/36 olasılıkla yendiğini görürüz.

Demek *C*, hem *A*'yı hem de *B*'yi yeniyor. Hiç kuşku yok ki bu örnekte *C* en iyi zardır.

Birinci Soru. Öyle *A*, *B* ve *C* zarları var mıdır ki, *A* zarı *B* zarını yensin[2], *B* zarı *C* zarını yensin ve *C* zarı *A* zarını yensin? Ayrıca zarların üstünde 18 değişik sayı olsun[3]?

Birinci Sorunun Yanıtı. Evet vardır! Bu zarları bulacağız. Hatta öyle zarlar bulacağız ki, *A*, *B* ve *C* birbirlerini hep aynı sonuçla, 19'a 17 yenecek! Ve atacakları ortalama zar aynı olacak!

1'le 18 arasındaki sayıları rastgele bir biçimde *A*, *B* ve *C*'ye dağıtalım. Eğer şanslı bir günümüzdeysek istediğimize ulaşırız. Şansımızı deneyelim. Diyelim *A*, *B* ve *C*'ye şu sayıları dağıttık:

A :	3	5	8	12	14	16
B :	2	4	9	11	13	18
C :	1	6	7	10	15	17

Bu zarları yarıştırırsak şu sonuçları elde ederiz:

A-B : 19–17
B-C : 19–17
C-A : 18–18

İlk iki karşılaşma istediğimiz gibi, ama son karşılaşma istediğimiz gibi değil. *C*'nin *A*'yı yenmesini istiyorduk, oysa yenişemediler. Demek ki *C*'yi güçlendirip *A*'yı zayıflatmamız gerekir. *A*'nın büyük bir sayısını *C*'nin küçük bir sayısıyla değiştirirsek istediğimiz olur ama, o zaman da istemeden *A-B* ve *B-C* sonuçlarını değiştirebiliriz... Bunu engellemeliyiz ama nasıl? *A*'nın hangi büyük sayısıyla *C*'nin hangi küçük sayısını değişti-

2 Olasılık olarak sözediyoruz burda elbet. Yani A'nın B'yi yenme olasılığı 1/2'den büyük olsun.

3 Eğer böyle 18 değişik sayı varsa, dilersek bu sayıları 1'den 18'e kadar alabiliriz.

relim ki, *A*-*B* ve *B*-*C* karşılaşmaları (yani *B*'nin yaptığı karşılaşmalar) bu değişimden etkilenmesinler? *A*'nın 8'iyle *C*'nin 7'sini değiştirirsek, hem *C* güçlenmiş hem de *A* zayıflamış olur, hem de *A*-*B* ve *B*-*C* karşılaşmaları bu değişimden etkilenmezler! Çünkü *B*'nin bir sayısı 7'den küçükse, 8'den de küçüktür; 8'den küçükse 7'den de küçüktür... Dediğimiz gibi yapalım ve 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim:

A:	3	5	7	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	1	6	8	10	15	17

Bu yeni zarlarda *A*-*B*, *B*-*C* ve *C*-*A* karşılaşmaları hep aynı sonuçla, 19-17 biter. İstediğimiz gibi *A*, *B*, *C* zarı bulduk.

Okur herhalde ilk denememdeki *A*, *B*, *C* zarlarının sayılarını rastgele yerleştirdiğime inanmıyordur. Okur inanmamakta haklı. İlk zarları nasıl bulduğumu anlatayım.

Herhangi iki zarın 5-6, 7-8 gibi ardışık iki sayıyı paylaşmaları işime gelir. Hatta bunun bir değil iki ardışık sayı çifti için böyle olması daha da iyi olur. Gerekirse birini, gerekirse diğerini güçlendirmek için kullanırım. Böylece hatayı gidermem kolay olur, çünkü böylece diğer iki karşılaşmanın sonucunu değiştirmeden istediğim karşılaşmanın sonucunu istediğim yönde değiştirebilirim. Bunu biliyorum. Dolayısıyla ilk denememde bunu sağlamaya çalışmalıyım. Sayıları zarlara şöyle dağıtalım:

B:						18
C:					15	17
A:	1			12	14	16
B:	2	4		11	13	
C:	3	5	7	10		
A:		6	8			
B:			9			

Yani şöyle:

A :	1	6	8	12	14	16
B :	2	4	9	11	13	18
C :	3	5	7	10	15	17

Bu zarlar aralarında oynarlarsa her karşılaşma 18-18 berabere biter... Oysa ben - örneğin - *A*'nın *B*'yi yenmesini istiyorum. 1'le 2'nin yerlerini değiştirirsem, *A*'yı güçlendiririm, *B*'yi zayıflatırım ve *C*'nin karşılaşmalarının sonuçlarını değiştirmem. Bu değiştirmeyi yapacak olursam *A*-*B* karşılaşması istediğim gibi biter ve *B*-*C* ve *A*-*C* karşılaşmalarında bir değişiklik olmaz. *B*-*C* karşılaşmasını *B*'ye kazandırtmak için 4'le 5'in yerlerini değiştireyim. *B*öylece *B*-*C* karşılaşmasını *B* kazanır ve *A*-*B* karşılaşmasını hâlâ *A* kazanır, hem de aynı sonuçla. Son olarak, *C*-*A* karşılaşmasını *C*'ye kazandırtmak için 7'yle 8'in yerlerini değiştirebilirim. Sonuç olarak şu zarları elde ederim:

A :	2	6	7	12	14	16
B :	1	5	9	11	13	18
C :	3	4	8	10	15	17

Ve şu sonuçları elde ederiz:

A-*B* : 19-17
B-*C* : 19-17
C-*A* : 19-17

İstediğimiz de buydu zaten. Üstelik her üç zarın ortalama sayısı aynı: 57/6 = 9,5.

İkinci Soru. Aynı şeyi dört zarla yapmaya çalışalım. Üstlerinde 1'den 24'e kadar tüm sayıların bulunduğu öyle dört *A*, *B*, *C*, *D* zarı bulalım ki *A*-*B*, *B*-*C*, *C*-*D* ve *D*-*A* karşılaşmalarının sonucu 19-17 olsun. Ayrıca *A*-*C* ve *B*-*D* karşılaşmalarının sonucu 18-18 olsun!

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukarda anlattığımız yöntemi deneyelim.

Zarları ilk aşamada şöyle dağıtalım:

C:						24
D:					20	23
A:	1			16	19	22
B:	2	5		15	18	21
C:	3	6	9	14	17	
D:	4	7	10	13		
A:		8	11			
B:			12			

Yani zarlarımızın yüzleri şöyle olsun:

A:	1	8	11	16	19	22
B:	2	5	12	15	18	21
C:	3	6	9	14	17	24
D:	4	7	10	13	20	23

Karşılaşmaların sonuçlarını da yazalım:

A-*B* : 19-17
B-*C* : 18-18
C-*D* : 17-19
D-*A* : 18-18
A-*C* : 19-17
B-*D* : 19-17

Tam istediğimiz gibi olmadı ama pek uzak sayılmayız. *A*-*B* karşılaşması tam istediğimiz gibi sonuçlandı: 19-17. *A*ma öbür karşılaşmaların hiçbiri istediğimiz gibi sonuçlanmadı. İkinci ve üçüncü karşılaşmalara bakalım ilk olarak. İkinci karşılaşma 18-18 bitmiş, oysa biz *B*'nin 19-17 kazanmasını istiyorduk. Demek ki *B*'yi *C*'den 1 sayı daha güçlü kılmalıyız. Üçüncü karşılaşma 17-19 skoruyla *D*'nin lehine bitmiş, oysa biz tam tersini istiyorduk. Demek ki *C*'yi *D*'den daha güçlü kılmalıyız. Bu isteklerimizi ilk iki sütunla oynayarak yerine getirebiliriz:

A :	1	8	11	16	19	22
B :	4	5	12	15	18	21
C :	3	7	9	14	17	24
D :	2	6	10	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-B : 19-17
B-C : 19-17
C-D : 19-17
D-A : 18-18
A-C : 19-17
B-D : 18-18

Dördüncü ve beşinci karşılaşmalar hâlâ daha istediğimiz gibi değil. Örneğin *A-C* karşılaşmasını iki sayı farkla *A* kazanmış. Oysa biz bu karşılaşmanın 18-18 berabere bitmesini istiyorduk. Demek ki *C*'yi *A*'dan 1 puan güçlendirmeliyiz. Bunun için 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim. *A-D* karşılaşmasını da yoluna koymak için 10'la 11'in yerlerini değiştirelim. İşte zarlar:

A:	1	7	10	16	19	22
B:	4	5	12	15	18	21
C:	3	8	9	14	17	24
D:	2	6	11	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-B : 19-17
B-C : 19-17
C-D : 19-17
D-A : 19-17
A-C : 18-18
B-D : 18-18

Tam istediğimiz gibi... Ayrıca her zarın ortalaması 75/6'dır ve her oyuncu 19 + 19 + 18 sayı elde eder, yani averajda da eşitlik bozulmaz.

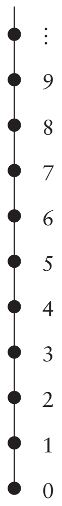
Yazının başında sorduğum satranç sorusunun yanıtını hâlâ daha bilmiyorum. Ama yukardaki bulgularım bana satrançta "daha iyi oyuncu" ilişkisinin bir ***tamsıralama*** olmadığını fısıldıyor. Kimi oyuncu oyun başında, kimi oyuncu oyun ortasında, kimi oyuncuysa oyun sonunda iyi olabilir. Kimi oyuncu savunmada iyidir. Kimisi hırslı oyuncuya karşı daha iyi oynar...

Bir satranç oyununu kazandıran (ya da kaybettiren) birçok eleman olduğundan, "daha iyi satranç oyuncusu" ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu hiç sanmıyorum.

2. Sıralama

İlk bölümde her şeyin sıralanmayacağını gördük. Ama bu, hiçbir şey sıralanmaz anlamına gelmez tabii ki. Bazı şeyler bal gibi sıralanır. Örneğin ÖSS sınav sonuçlarına göre gençlerimiz sıralanabilirler, sıralanıyorlar da...

Bu bölümde sıralamanın matematiksel anlamını ve bir sürü örnek göreceğiz. Matematiksel tanımı daha sonraya saklayarak örneklerle başlayalım.



Örnek 2.0.1. İlk örneğimiz doğal sayılar kümesi olsun. En küçük doğal sayı 0'dır, sonra 1 gelir, sonra 2, vs. Herhangi iki doğal sayıyı büyüklüklerine göre karşılaştırabiliriz. Örneğin $3 < 5$. Ayrıca $5 < 8$. Dolayısıyla $3 < 8$ vs. Doğal sayılar, herkesin bildiği üzere

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

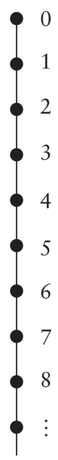
diye sıralanmışlardır. Bu sıralamanın ***en küçük elemanı*** vardır (o da 0'dır). Ama ***en büyük elemanı*** yoktur, her doğal sayıdan daha büyük doğal sayı vardır çünkü. Bu sıralamanın bir başka özelliği de her elemanın hemen ***bir büyüğünün*** olması, 25'in bir büyüğü 26'dır örneğin. Ayrıca, bu sıralamada, 0 dışında her elemanın ***bir öncesi*** de vardır.

Doğal sayıların bu sıralamasına ***doğal sıralama*** adını vereceğiz ve bu sıralamayı $(\mathbb{N}, <)$ olarak göstereceğiz. Doğal sayıların doğal sıralamasını bir önceki sayfada solda resmettik. Küçük elemanları aşağıya, büyük elemanları yukarıya yazdık. Görsel olarak hep böyle yapacağız, küçükleri aşağıya, büyükleri yukarıya yazacağız.

Örnek 2.0.2. İkinci örneğimizde doğal sayılarda alışık olduğumuz sıralamayı ters çevirelim: Bu sefer en küçük sayı (yani 0) bu yeni sıralamaya göre en "büyük" eleman olacak. Sayıları bir sınavda yapılan yanlış sayısı olarak yorumlarsak böyle bir sıralamanın neden gerekli olabileceğini anlarız. Bu kez 0 puan alan (yani 0 yanlış yapan) en iyisidir, ondan daha iyisi yoktur. 1 puan alan da fena değildir ama 0 puan kadar iyi değildir. Bu sıralamayı $\prec$ işaretiyle gösterelim:

$$\ldots \prec 5 \prec 4 \prec 3 \prec 2 \prec 1 \prec 0.$$

Bu yeni sıralamanın en büyük elemanı var, 0. Ama en küçük elemanı yok, her elemanın hemen bir küçüğü var, örneğin 5'in bir küçüğü bu sıralamaya göre 6. Ayrıca 0 dışında her sayının hemen bir büyüğü var. Bu sıralamaya göre 5'in hemen bir büyüğü 4'tür. Yandaki şekilde bu yeni sıralamayı resmettik. En büyük elemanı en tepede gösterdik, elemanlar küçüldükçe aşağılandılar. Aşağı doğru istediğimiz kadar gidebiliriz.

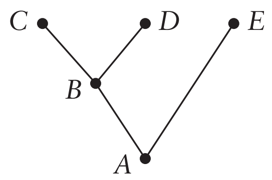


Doğal sayıların doğal sıralamasıyla karışmasın diye bu yeni sıralamayı $\prec$ simgesiyle gösterdik. Doğal sayılar üstündeki bu yeni sıralamaya gelecekte $(\mathbb{N}, \prec)$ olarak gönderme yapacağız.

Dikkatli okur, bu sıralamayla negatif tamsayıların sıralaması arasında büyük bir ayrım olmadığını görmüştür. Nitekim, bildiğimiz sıralamayla, negatif tamsayılar, aynen bu örnekte olduğu gibi,

$$\ldots < -5 < -4 < -3 < -2 < -1 < 0.$$

Örnek 2.0.3. Üçüncü örneğimizi gönül işlerinden seçelim, daha heyecanlı oluyor. Diyelim Gül'ün beş talibi var: Ayhan, Burak, Can, Doğan ve Erdem. Gül, bu beş talipten birini seçmek için delikanlıları sınavdan geçiriyor. En öncelikli kıstası zekâ olduğundan önce taliplerine satranç oynatıyor. Ayhan herkese yeniliyor, Burak hem Can'a hem de Doğan'a yeniliyor. Zaman kalmadığından başka da maç yapılmıyor. Bu aşamada Gül'ün sıralamasını şöyle gösterebiliriz:



$$A < B < C,\ A < B < D \text{ ve } A < E.$$

Burada A Ayhan'ı, B Burak'ı vs temsil ediyor elbette. Sıralamayı yukarda şeklettik. En düşük puan alan Ayhan'ı en alt sıraya yerleştirdik.

Bu aşamada Gül Erdem'le Burak arasında bir kıyaslama yapamıyor henüz ama bu kıyaslayamama yukardakinin bir sıralama ya da kısmi sıralama olmasına engel olmayacak. (Matematiksel tanım biraz sonra...)

Gül, Erdem'le Can ve Doğan'ı da kıyaslayamıyor. Ama Can'ı ve Doğan'ı Burak'a tercih ediyor.

Örnek 2.0.4. Dördüncü örneğimizde bir kümenin altkümelerini 'küçükten büyüğe' sıralayacağız. E bir küme olsun (Evren'in E'si.) E'nin altkümeleri kümesine X diyelim. Örneğin

$$E = \{0, 1, 2\}$$

olabilir. O zaman X'in şu 8 elemanı vardır:

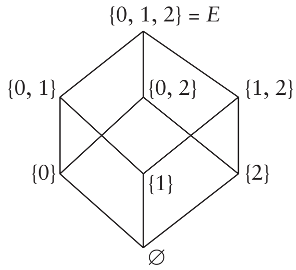
$$\begin{array}{l} \varnothing \\ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \\ \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\} \\ \{0, 1, 2\} = E. \end{array}$$

Eğer $A, B \in X$ ise, yani A ve B, E'nin altkümeleriyse, "A, B'den küçüktür" ilişkisini $A \subset B$ olarak tanımlayalım. Yani A, B'nin özaltkümesiyse ($A \subseteq B$ ve $A \neq B$ ise), o zaman A'nın

B'den küçük olduğunu söyleyelim. Bu, birazdan tanımlayacağımız anlamda bir sıralamadır.

Bu sıralamada, üçüncü sıralamadaki gibi karşılaştırılamayan elemanlar vardır. Örneğin *X*'in $\{0\}$ ve $\{1\}$ elemanları (yani *E*'nin $\{0\}$ ve $\{1\}$ altkümeleri) karşılaştırılamazlar; birbirlerine eşit olmadıkları gibi ne biri diğerinin ne de beriki öbürünün özaltkümesidir.

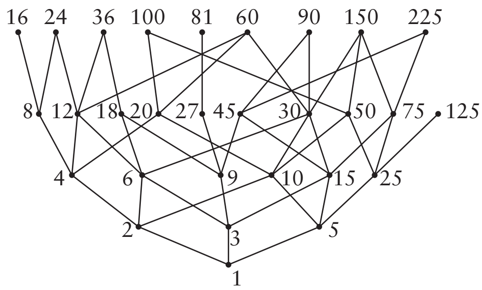
Bu sıralamayı $E = \{0, 1, 2\}$ durumunda "aşağıdan yukarı doğru" yandaki gibi resmedebiliriz.



Gelecekte bu sıralamaya $(\wp(E), \subset)$ sıralı çifti olarak gönderme yapacağız. Burada, $\wp(E)$, *E*'nin altkümeler kümesi, yani *X* anlamına geliyor.

Örnek 2.0.5. Gene doğal sayıları ele alalım. Eğer x, y'yi (doğal sayılarda) bölüyorsa, yani $xz = y$ eşitliğini sağlayan bir z doğal sayısı varsa, ama $x \neq y$ ise, x, y'den (şu anda tanımlamak üzere olduğumuz sıralamaya göre) "küçük" olsun. Yani bölen sayılar küçük, bölünen sayılar büyük...

0, kendisi dışında hiçbir sayıyı bölmediğinden (çünkü z ne olursa olsun $0z = 0 \neq y$), 0'dan büyük sayı yoktur. Öte yandan (0 dahil!) her sayı 0'ı böldüğünden (çünkü $x0 = 0$) her sayı 0'dan küçüktür. Dolayısıyla doğal sıralamanın en küçük elemanı olan 0 bu sıralamanın en büyük elemanıdır.



1 her sayıyı böldüğünden, 1 bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Asal sayılar da 1'den "bir boy büyük" elemanlardır elbette: 1'le bir asal sayı arasında bu sıralamaya göre bir başka eleman yoktur.

Bu sıralamaya göre, bir p asalından bir büyük elemanlar p^2 ve bir q asalı için pq biçiminde yazılan elemanlardır. Bu sıralamanın küçük bir parçasının bir resmini yukarıda sunduk.

Bölen sayıları aşağıya, bölünen sayıları yukarı yazdık, ayrıca bu iki sayıyı bir doğruyla birleştirdik. Ancak şekil karışmasın diye, örneğin, 2 ile 36 arasına bir doğru çizmedik (bu yöntemle çizilen şekle ***Hasse diyagramı*** denir.) 2'den 36'ya giden en az bir yükselen yol olduğundan 2'nin (bu sıralamaya göre) 36'dan küçük olduğu şekle bakınca anlaşılıyor.

Bu sıralamanın tanımı son derece basit ama kendisi de bir o kadar karmaşık. Yukardaki şemaya bir de 7'yi eklerseniz bu sıralamanın ne kadar karmaşık bir sıralama olduğunu daha iyi anlarsınız, hatta sadece dördüncü katı tamamlamaya çalışın...

Bir sayıyı asallara ayırarak sayının 1'den yüksekliğini de hesaplayabiliriz. Örneğin,

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$

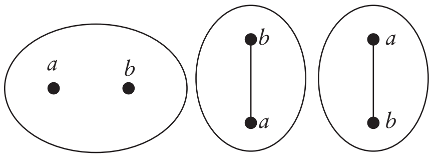
olduğundan, 60'ın yüksekliği $2 + 1 + 1 = 4$'tür, yani 1'den başlayarak tam dört adımda 60'a ulaşabiliriz, örneğin 1–2–6–30–60 bu yollardan biridir.

Gelecekte bu sıralamaya $(\mathbb{N}, |)$ olarak gönderme yapacağız.

Örnek 2.0.6. Sonlu Kümeler Üzerine Sıralama. Her ne kadar matematiksel değeri olmasa da, pedagojik önemi olduğundan az sayıda elemanı olan kümeler üzerine sıralamaları bulalım.

Eğer X boşkümeyse ya da X'in tek bir elemanı varsa, X'te kıyaslayabileceğimiz iki değişik eleman olamayacağından bu durumlarda yapacak bir şey yok, bu kümeler üzerine sadece tek bir sıralama vardır: ***boşsıralama*** denilen ve hiçbir elemanın hiçbir elemanla kıyaslanmadığı tek bir sıralama.

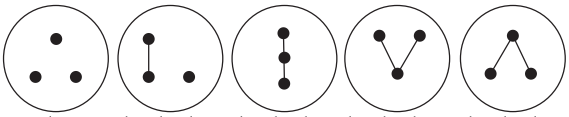
Eğer X'in iki elemanı varsa, diyelim $X = \{a, b\}$ ise, o zaman X üzerine aşağıda görülen üç değişik sıralama vardır. Bunlardan son ikisi birbirlerine çok benzerler, birbirlerinden 'gerçekten farklı' ol-



a ve *b* kıyaslanamaz, boşsıralama — $a < b$ — $b < a$

dukların söylemek zor... İlerde, "eşyapısallığı" tanımladığımızda, son iki sıralamanın ***eşyapısal*** olduklarını söyleyeceğiz.

Şimdi X'in üç elemanı olduğunu varsayalım. O zaman, X üzerine 19 tane değişik ama sadece 5 tane "gerçekten değişik" yani "eşyapısal olmayan" sıralama vardır.



boşsıralama, bunlardan 1 tane var — bunlardan 6 tane var — bunlardan da 6 tane var — bunlardan 3 tane var — bunlardan 3 tane var

Eleman sayısı dörde çıkarsa sıralama sayısı çok artar. Bunların sayısını bulmayı okura bırakıyoruz.

Sonlu sıralama örneklerini saymazsak, yukarda beş sıralama örneği verdik. İlk ikisi ve sonuncusunda doğal sayıları üç değişik biçimde sıraladık: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N}, \prec)$, $(\mathbb{N}, |)$. Birincisinde doğal sıralamayı aldık. İkincisinde doğal sıralamayı ters çevirdik. Sonuncusunda ise sıralamayı bölünebilirlikle tanımladık. Görüldüğü gibi aynı küme değişik biçimlerde sıralanabiliyor.

Son dört örnekte de görülebileceği gibi illa iki farklı elemandan birinin diğerinden küçük olması gerekmiyor. Bu durum ilk iki örnekte zuhur etmiyor; bu sıralamalarda birbirinden farklı herhangi iki elemanı karşılaştırabiliyoruz.

Matematiksel Tanım. Üstünde bir sıralama tanımlayacağımız kümeye X diyelim. X'in elemanlarını bir biçimde sıralamak istiyoruz. İlla birinci, ikinci diye değil, çünkü X'te birinci ya da ikinci olmayabilir.

Sıralama dediğimiz şey, X'in bazı elemanlarının X'in bazı elemanlarından daha küçük (ya da daha büyük) olduklarını buyurmaktır. Öylesine bir buyruk değil ama... Bu buyruğun şu iki özelliği sağlaması gerekir:

S1. *Hiçbir eleman kendinden küçük olamaz.*

S2. *Eğer x, y'den küçükse ve y de z'den küçükse, o zaman x, z'den küçük olmalıdır.*

Bu iki özelliği sağlayan ikili bir ilişkiye ***sıralama*** denir.

Eğer "x, y'den küçüktür" ifadesini $x < y$ olarak kısaltırsak, o zaman yukardaki S1 ve S2 koşulları şu biçimde yazılırlar:

S1. *Hiçbir $x \in X$ için $x < x$ olmaz.*

S2. *Her x, y, $z \in X$ için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise, $x < z$'dir*[1].

Dikkat ederseniz herhangi iki elemanın karşılaştırılabileceğini söylemiyor sıralama koşulları, yani x'in y'den küçük olmadığı, y'nin de x'ten küçük olmadığı $x \neq y$ elemanları olabilir. Bu yüzden bu koşulları sağlayan bir sıralamaya kimi zaman ***kısmi sıralama*** dendiği de olur.

Herhangi iki elemanın karşılaştırılabildiği bir sıralamaya, yani S1 ve S2 dışında,

S. *Her x, $y \in X$ için, ya $x < y$ ya $y < x$ ya da $x = y$*

koşulunu sağlayan bir sıralamaya ***tamsıralama*** denir. Yazının başında verdiğimiz ilk iki örnek birer tamsıralamadır, son üç örnek ise tamsıralama olmayan kısmi sıralamalardır çünkü son üç örnekte karşılaştırılamayan (ve eşit olmayan) elemanlar vardır.

---

1 S1 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ***yansımasız*** ilişki denir. S2 özelliğine sahip bir ikili ilişkiye ise ***geçişkenli*** ya da ***geçişli*** ilişki denir, bkz. [SKK].

Tamsıralamaları daha sonraki bölümlerde daha ayrıntılı olarak konu edeceğiz.

Bir sıralamada $<$ yerine kimi zaman $\subset$ (dördüncü örnekte olduğu gibi), $\prec$, $\sqsubset$, $\lhd$ gibi başka imgelerin kullanıldığı da olur. Örneğin doğal sayıları tersten sıraladığımız ikinci örneğimizde "doğal sıralama"yla karışmasın diye $<$ yerine $\prec$ imgesini kullanmıştık. Gene doğal sayıları sıraladığımız beşinci örneğimizde sıralama bölünebilirliğe göre tanımlandığından, $<$ yerine $|$ imgesini kullanmak yerinde bir karardı.

Eğer bir sıralamada $x < y$ ise, y'nin (bu sıralama için) x'ten ***daha büyük*** olduğunu söyleriz.

Bir sıralamada hem x, y'den hem de y, x'ten küçük olamaz, çünkü o zaman S2'de $z = x$ alarak, $x < x$ buluruz ki bu da S1'le çelişir.

Eğer $<$ diye adlandırılan bir sıralama verilmişse, elemanlar arasında eşitliği de içeren ve genellikle $\leq$ imiyle simgelenen ikili bir ilişki şöyle tanımlanır:

$$x \leq y \Leftrightarrow x < y \text{ ya da } x = y. \tag{1}$$

$\leq$ ikili ilişkisi şu özellikleri sağlar:

T1. *Her $x \in X$ için $x \leq x$.*

T2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, $x \leq z$'dir.*

T3. *Her $x, y \in X$ için, eğer $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise, $x = y$ eşitliği doğrudur.*

$<$ ilişkisinin S1 ve S2'yi sağladığını varsayarak yukarıda tanımlanan $\leq$ ilişkisinin T1, T2 ve T3'ü kanıtlayalım. T1 ve T2'nin doğrulukları çok bariz. T3'ü kanıtlayalım. $x \leq y$ ve $y \leq x$ olsun. Eğer $x \neq y$ ise, $\leq$ ilişkisinin tanımına göre $x < y$ ve $y < x$ olur. Bundan ve S2'den $x < x$ çıkar, ki bu da S1'le çelişir.

Eğer bir X kümesi üzerine yukardaki T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ikili ilişkisi verilmişse ve $<$ ikili ilişkisini,

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ ve } x \neq y \tag{2}$$

olarak tanımlarsak, o zaman $<$ ilişkisi S1 ve S2 özelliklerini sağlar, dolayısıyla bir sıralama olur. Bunun kanıtı çok basittir ve okura bırakılmıştır.

Kolayca görüleceği üzere S1 ve S2 özelliğini sağlayan bir sıralamayla, T1, T2 ve T3 özelliğini sağlayan ikili ilişkiler arasında bir eşleme vardır. Birinden diğeri açıklanan yöntemlerle elde edilir. Ve açıklanan yöntemler iki kez uygulandığında başlanan ikili ilişki bulunur. Yani S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir $<$ sıralamasından başlarsak ve bu sıralamaya önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $<$ sıralamasını buluruz. Ayrıca eğer T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ ilişkisinden başlarsak ve bu ilişkiye önce (1), sonra da (2) yöntemini uygularsak başladığımız $\leq$ ilişkisini buluruz.

Demek ki S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir sıralamayla T1, T2 ve T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişki arasında pek bir fark yoktur. Bu yüzden bundan böyle T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkiye de ***sıralama*** diyeceğiz. Eğer sıralamayı $<$, $\prec$, $\subset$, $\sqsubset$, $\lhd$ gibi bir simgeyle tanımlarsak, sıralamanın S1 ve S2 özelliklerini sağladığını, ama eğer sıralamayı $\leq$, $\leqq$, $\lesssim$, $\subseteq$, $\sqsubseteq$, $\unlhd$ gibi bir simgeyle tanımlarsak T1, T2, T3 özelliklerini sağladığını varsayacağız[2].

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasının bir tamsıralama olması için,

T. *Her* x, $y \in X$ *için*, *ya* $x \leq y$ *ya da* $y \leq x$

özelliğinin sağlanması yeter ve gerek koşuldur elbette.

T1, T2, T3 özelliklerini sağlayan bir $\leq$ sıralamasında eğer $x \leq y$ ise, "x, y'den ***küçükeşittir***" ya da "y, x'ten ***büyükeşittir***" diyeceğiz.

Eğer bir sıralama verilmişse, $>$, $\geq$, $\nless$, $\ngtr$, $\nleq$, $\ngeq$, $\nprec$, $\nsucc$ gibi anlamı bariz olan ve alışık olduğumuz simgeleri hiç çekinmeden kullanacağız. Örneğin:

2 Arife not: Kategori teorisinde bu dediğimiz doğru değildir. Eğer sıralama tamsıralama değilse, eşyapı fonksiyonlarında sorun çıkar.

$x > y \Leftrightarrow y < x$
$x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$
$x \not\geq y \Leftrightarrow x \geq y$ doğru değilse
$x \not\prec y \Leftrightarrow x \prec y$ doğru değilse

Dikkat! Eğer $(X, <)$ bir tamsıralama değilse, $x \not< y$ illa $x \geq y$ anlamına gelmeyebilir, çünkü x ve y karşılaştırılamaz da olabilirler.

Dört sayfayı aşan bir örnek ve tanım faslından sonra bölümün kalan kısmında sıralamaların bazı özelliklerini ve bazı sıralama örnekleri göstereceğiz.

2.1. Daha Matematiksel Bir Deyişle...

Sıralamanın asıl matematiksel tanımı şöyledir. X bir küme olsun. $A \subseteq X \times X$,

S1. *Her $x \in X$ için $(x, x) \notin A$,*
S2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $(x, y) \in A$ ve $(y, z) \in A$ ise o zaman $(x, z) \in A$ olur*

özelliklerini sağlayan bir altküme olsun. O zaman A'ya X üzerine bir ***sıralama*** denir ve bu sıralama (X, A) olarak yazılır.

X üzerine bir ***ikili ilişki*** sadece $X \times X$'in bir altkümesidir [SKK, Sİ]. Demek ki bir sıralama S1 ve S2 özelliklerini sağlayan bir ikili ilişkidir.

Eğer (X, A) bir sıralamaysa, sık sık $(x, y) \in A$ yerine $x < y$ gibi sezgilerimize daha fazla hitap eden ve daha fazla anlam ima eden bir yazılım kullanılır. O zaman sıralama (X, A) yerine $(X, <)$ olarak yazılır.

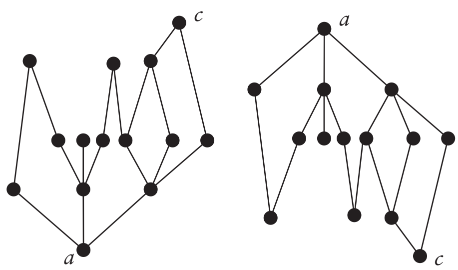
Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, eğer $A = \emptyset$ ise S1 ve S2 özellikleri doğru olur ve böylece hiçbir elemanın hiçbir elemanla karşılaştırılmadığı ***boşsıralama*** adı verilen $(X, \emptyset)$ sıralamasını elde ederiz. Boşsıralamaya ***kararsız*** sıralama adını da verebiliriz. Zaten tek bir elemanı olan bir küme üzerine sadece boşsıralama olabilir. Hayatta boşsıralamadan daha ilginç sıralamalar vardır.

Alıştırma 2.1.1. X bir küme olsun. Eğer (X, A) ve (X, B) sıralamalarsa ve A sub B ise, (X, B) sıralamasının (X, A) sıralamasından daha büyük olduğunu söyleyelim. X üzerine bir tamsıralamanın, A'nın en büyük olduğu (X, A) sıralaması olduğunu kanıtlayın.

2.2. Eskilerden Yeni Sıralamalar Türetmek

Bu altbölümde bir sıralamadan nasıl başka sıralamalar elde edileceğini göreceğiz.

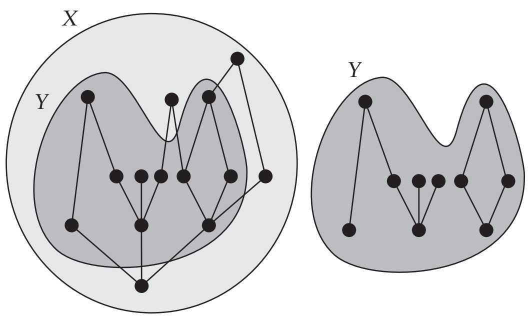
2.2.1. Bir Sıralamayı Ters Çevirmek. İkinci örneğimiz olan $(\mathbb{N}, \prec)$ sıralamasında birinci örneğimiz olan $(\mathbb{N}, <)$ sıralamasını ters çevirmiştik, birinci örnekte büyük olan elemanlar ikinci örnekte küçük olmuşlardı. Genel olarak, herhangi bir sıralamayı ters çevirerek yeni bir sıralama elde edebiliriz: Eğer $<$, X kümesi üzerine bir sıralamaysa, $x \prec y$ ilişkisini $y < x$ olarak tanımla-



Bir sıralama ve onun ters çevrilmiş hali

yalım; o zaman $\prec$ de X üzerine bir sıralamadır. Bu iki sıralama arasında kaydadeğer bir fark olduğunu söylemek zor, biri bilindi mi diğeri de bilinir. Örneğin birinin en küçük elemanı varsa diğerinin en büyük elemanı vardır vs.

2.2.2. Sıralı Bir Kümenin Bir Altkümesini Sıralamak. Sıralı bir X kümesinin bir Y altkümesi verilmişse, X'in sıralamasını Y'ye kısıtlayarak Y'yi de sıralayabiliriz, yani Y kümesi X üst-



Bir sıralama ve bir altkümesi

kümesinin sıralamasıyla sıralanır. X'in sıralamasını sadece Y'nin elemanlarına kısıtlamak yeterlidir bunun için. Bu durumda Y'nin sıralamasının X'in sıralamasından ***miras kaldığı*** ya da X'in sıralamasının ***kalıntısı*** olduğu söylenir. Örneğin $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralaması hem $\mathbb{Q}$'nün hem de $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralaması da hem $\mathbb{Z}$'nin hem $\mathbb{Q}$'nün hem de $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamasının kalıntısıdır.

Y'nin bu sıralamasına X'in ***altsıralaması*** denir.

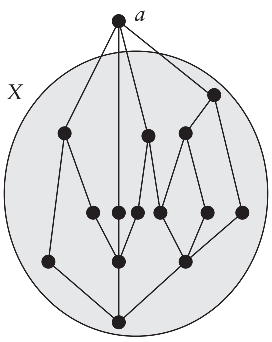
2.2.3. Yeni Bir Eleman Eklemek. Eğer bir $(X, <)$ sıralaması verilmişse ve a, X'te olmayan bir elemansa, $X \cup \{a\}$ kümesini X'in sıralamasını bozmayacak şekilde çeşitli biçimlerde sıralayabiliriz. En kolayı ve en çok kullanım alanı bulanı a'yı en tepeye koymaktır, yani a'yı en büyük eleman yapmaktır. $X \cup \{a\}$ kümesinin bu sıralamasında, X'in eski düzeni aynen korunur, bir de ayrıca a'nın X'in tüm elemanlarından daha büyük olacağı buyrulur. Yani her x, $y \in X \cup \{a\}$ için,

$$x < y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in X \text{ ve } (X, <) \text{ sıralamasında } x < y \text{ ya da} \\ x \in X \text{ ve } y = a \end{cases}$$

tanımı yapılır.

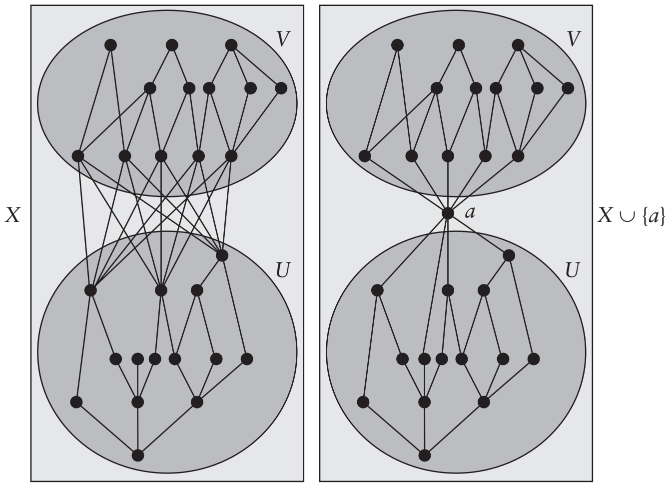
Bir sonraki şekilde X'in en tepesine eleman eklemeyi resmettik.

a elemanı yukardaki gibi X'in tepesine eklendiğinde a yerine ∞ yazmak fena fikir olmayabilir ama bu fikri kullanmayacağız.



Sıralanmış bir *X* kümesinin tepesine bir eleman eklemek

a'yı *X*'in tepesi yerine başka bir yerine de ekleyebiliriz. Örneğin *X*'in içinde şu özellikleri sağlayan *U* ve *V* kümeleri olduğunu varsayalım: $U \cup V = X$ ve *U*'nun her elemanı *V*'nin her elemanından küçük. Şimdi *a*'yı *U* ile *V* arasına koyalım, yani *a*'yı *U*'nun



a'yı *U* ile *V* arasına koymak

her elemanından büyük ve *V*'nin her elemanından küçük yapalım. $X \cup \{a\}$ kümesi üstünde yeni bir sıralama elde ederiz. Böylece *a* elemanı diğer bütün elemanlarla karşılaştırılabilir olur.

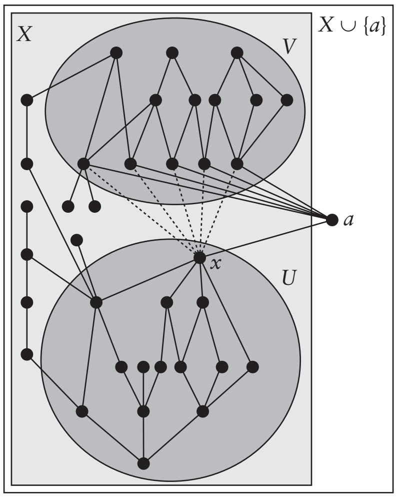
Aslında *a*'yı en tepeye koymak bunun özel bir halidir: Eğer yukardaki inşada $U = X$ ve $V = \emptyset$ alırsak, *a*'yı en tepeye koymuş oluruz.

Yeni bir sıralama elde etmek için illa $U \cup V = X$ eşitliği sağlanması gerekmez. Bu eşitlik geçerli olmadan da a'yı U ile V arasına koyabiliriz. Gene bir sıralama elde etmek için U ve V'nin sağlaması gereken gerek ve yeter koşulu bulmayı okura bırakıyoruz.

Bunun bir başka varyasyonu şöyledir: $x \in X$ ve

$$V = \{y \in X : x < y\} \text{ ve } U = \{y \in X : y \geq x\}$$

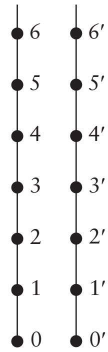
olsun. Şimdi a'nın V'nın elemanlarından küçük ve U'nun elemanlarından büyük olduğunu buyuralım. Böylece a'yı x'ten hemen sonra koymuş oluruz. Bunun resmi de aşağıda.



a'yı *x*'ten hemen sonra koymak

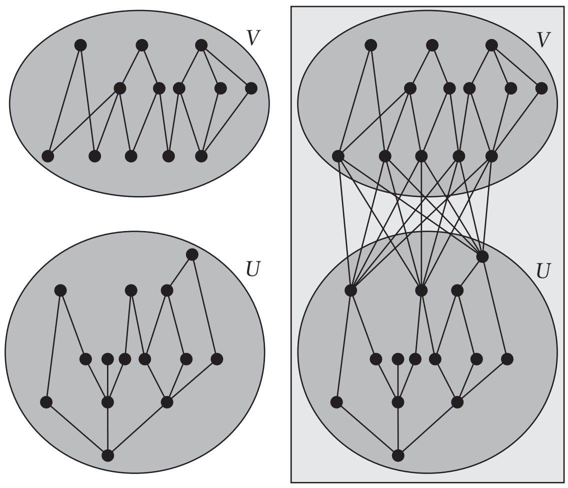
2.2.4. İki Sıralamayı Toplamak. $(U, <)$ ve $(V, <)$ iki sıralama olsun. U ile V'nin ayrık olduklarını, yani kesişimlerinin boş olduğunu varsayalım. Şimdi, U ve V'de varolan sıralama dışında yeni herhangi bir sıralama eklemeden $U \cup V$ kümesini sıralı bir küme olarak algılayabiliriz. $(U \sqcup V, <)$ olarak simgeleyeceğimiz bu sıralamada U'nun elemanlarıyla V'nin elemanları birbirleriyle kıyaslanamazlar.

Eğer U ve V kümeleri ayrık değillerse ve illa U ve V ile yukardaki inşayı yapmak istersek, önce bu iki kümeyi bir biçimde "ayrıklaştırmak" gerekir. Bunun standart yolu U yerine $U \times \{0\}$, V yerine $V \times \{1\}$ yazmaktır. Ayrıca U ve V'nin sıralamalarını bozmadan $U \times \{0\}$ ve $V \times \{1\}$ kümelerine taşınır. Eğer bu çok meşakkatli geliyorsa, V'nin elemanlarına (U'nunkilere değil!) v yerine v' adını verilir. $U = V = \mathbb{N}$ durumunda bunun resmini yanda yaptık.



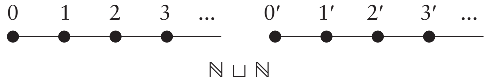
$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

$U \cup V$ bileşimini (kümeler hâlâ ayrık) şöyle de sıralayabiliriz. U ve V'nin varolan sıralamasını kabullenip ayrıca U'nun her elemanını V'nin her elemanından küçük addedebiliriz. $U \cup V$ kümesi üzerindeki bu sıralamaya $U + V$ olarak gösterilir. Resmi aşağıda.



U ve V sıralamaları $U + V$

$\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralaması önemlidir. Aşağıda bu sıralamayı gösterdik, ancak yerden kazanmak için $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ sıralamasını aşağıdan



$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$

yukarıya değil, soldan sağa yazdık. Zaten ilerde de elemanları küçükten büyüğe yazarken soldan sağa yazacağız.

2.2.5. Fonksiyonla Sıralama. $(Y, <)$ bir sıralama, X bir küme ve $f : X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. X üzerine şu $<$ ikili ilişkisini tanımlayalım: $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

olsun. Bu, kolayca kanıtlanabileceği üzere X üzerine bir sıralama tanımlar.

Dikkat: Tanımı

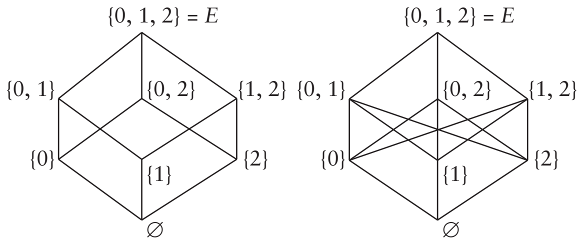
$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

olarak yapsaydık, eğer f birebir değilse, bu tanım bir sıralama tanımlamazdı; çünkü $x_1 \neq x_2$, için $f(x_1) = f(x_2)$ olursa, o zaman, $x_1 \leq x_2$ ve $x_2 \leq x_1$ olur ama $x_1 = x_2$ olmaz.

Örnek 2.2.5.1. E bir küme olsun. X, E'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

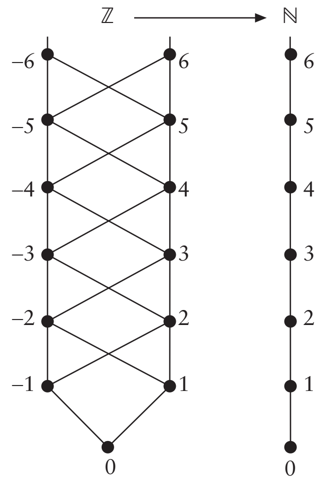
ilişkisi ($|x|$, x altkümesinin eleman sayısıdır) X üzerine bir sıralama tanımlar. Bu sıralama $(X, \subset)$ sıralamasından daha "ince" bir sıralamadır çünkü eğer $x_1 \subset x_2$ ise $x_1 < x_2$'dir. $E = \{1, 2, 3\}$ durumunda her iki sıralamanın resmi aşağıda.



Örnek 2.2.5.2. $X = \mathbb{Z}$ olsun. $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ için,

$$x_1 \sqsubset x_2 \Leftrightarrow |x_1| < |x_2|$$

ilişkisi ($|x|$, x sayısının mutlak değeridir) $\mathbb{Z}$ üzerine bir sıralama tanımlar. Resmi aşağıda olan ve büyüklüğün mutlak değere göre ölçüldüğü bu sıralamaya göre, örneğin, –3, 2'den daha büyüktür, yani $2 \sqsubset -3$'tür. Ama bu sıralamada, mutlak değerleri aynı olan sayılar karşılaştırılmaz.



2.2.6. Alfabetik Sıralama. En çok kullanılan ve en yararlı sıralamalardan biridir. $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer sıralama olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım: $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

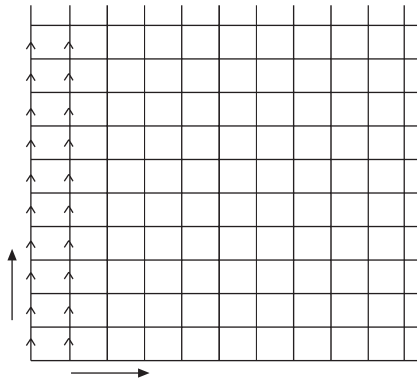
$$x_1 < x_2 \text{ ya da } x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 < y_2$$

ise. Bunun S1 ve S2 koşullarını sağlayan bir sıralama olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz. (Mutlaka yapılmalı!) Bu sıralamaya ***alfabetik sıralama*** adı verilir.

Neden alfabetik sıralama dendiği anlaşılmış olmalı: Önce ilk koordinata (ilk harfe!) göre sıralıyoruz. Sonra ikincisine göre... Üçüncü harfimiz olsaydı, bu sıralamaya devam edebilirdik.

Bu sıralamada bir (x, y) çiftinin yerini saptamak için önce x'e bakılır. x ne kadar küçükse (x, y) de o kadar küçüktür. Eğer birinci koordinatlar eşitse, o zaman ikinci koordinatlara bakılır.

Birkaç örnek vermekte yarar var. $(X, <) = (Y, <) = (\mathbb{N}, <)$ olsun. Bu sıralamaya göre $(5, 0) > (4, 100) > (4, 5) > (4, 0) > (3, 1000) > (2, 1) > (2, 0) > (1, 5) > (0, 600) > (0, 1) > (0, 0)$ olur.

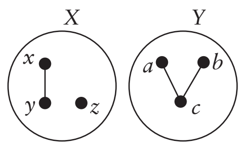


$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ızgarasının elemanları sağa ve yukarı gittikçe büyürler. İkinci sütunun tüm elemanları birinci sütunun tüm elemanlarından daha büyüktür. Üçüncü sütunun tüm elemanları ikinci sütunun tüm elemanlarından daha büyüktür.

$(0, 0)$ bu sıralamanın en küçük elemanıdır. Bu elemandan bir sonra gelen eleman $(0, 1)$'dır. Sonra $(0, 2)$, $(0, 3)$ vs gelir. Tüm $(0, n)$'ler bittikten sonra (!) ilk gelen eleman $(1, 0)$'dır. Bunun ardından $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ vs gelir. $(1, n)$ türünden elemanlar bittikten sonra $(2, 0)$ elemanı gelir ve sıralama böylecene sürer gider.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ örneğinde her elemandan hemen sonra gelen bir eleman vardır: (n, m) elemanından hemen sonra $(n, m + 1)$ elemanı gelir. Ayrıca $(n, 0)$ türünden elemanlar dışında her elemanın hemen bir öncesi vardır: Eğer $m \neq 0$ ise, (n, m)'den hemen önce gelen eleman $(n, m - 1)$ elemanıdır.

Alıştırmalar



2.2.6.1. Eğer X ve Y sıralamaları yandaki gibiyse $X \times Y$ alfabetik sıralamasını bulun.

Aşağıdaki alıştırmalar matematiksel ifade edilmemişseler de okur sıralamaları kavramaya çalışarak ne sorulmak istendiğini anlayabilir.

2.2.6.2. X herhangi sıralı bir küme olsun. $\{0, 1\}$ kümesini $0 < 1$ olarak sıralayalım. $X \times \{0, 1\}$ alfabetik sıralamasıyla $X + X$ sıralamasının bir anlamda "aynı" sıralama olduklarını gösterin.

2.2.6.3. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\mathbb{N}$'yi de doğal sıralayalım. $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ sıralamasıyla $\mathbb{N}$ sıralaması arasında "pek fark olmadığını" gösterin.

2.2.6.4. $\{0, 1\}$ kümesini yukardaki gibi, $\{a, b\}$ kümesi de boşsıralansın. $\{0, 1\} \times \{a, b\}$ alfabetik sıralamasıyla $\{a, b\} \times \{0, 1\}$ sıralamasının ayrı sıralamalar olduklarını gösterin.

2.3. Sıralamaların Özel Elemanları

2.3.1. En Küçük ve En Büyük Elemanlar. Bir sıralamada en küçük ya da en büyük eleman olabileceğini de olmayabileceğini de gördük. $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasının en küçük elemanı vardır ama en büyük elemanı yoktur. Bunun ters yüz edilmişi olan $(\mathbb{N}, \prec)$ sıralamasının en büyük elemanı vardır (0'dır) ama en küçük elemanı yoktur. $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamasının ne en küçük ne de en büyük elemanı vardır. Öte yandan $(\wp(E), \subset)$ sıralamasının hem en küçük ($\emptyset$) hem de en büyük (E) elemanı vardır.

X, E'nin sonlu altkümeleri kümesi olsun. X'i $\subset$ ilişkisine göre sıralayalım, yani $(X, \subset)$ sıralamasına bakalım. Eğer E sonsuz bir kümeyse, bu sıralamanın en büyük elemanı yoktur, çünkü herhangi bir sonlu A kümesine E'den A'da olmayan bir eleman eklersek, A'dan daha büyük bir küme elde etmiş oluruz.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında 0 en büyük elemandır ama $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasının en büyük elemanı yoktur.

Matematiksel tanım şöyle: Bir $(X, <)$ sıralamasının ***en büyük eleman***ı "her $x \in X$ için $x \le a$" özelliğini sağlayan bir $a \in X$ elemanıdır. ***En küçük eleman*** benzer biçimde tanımlanır. Eğer $A \subseteq X$ ise A'nın en büyük elemanı "her $x \in A$ için $x \le a$" özelliğini sağlayan bir $a \in A$ elemanıdır. Burada a'nın A'da olması önemlidir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) ve $A = (0, 1)$ aralığı ise, A'nın en büyük elemanı yoktur. Ama $A = (0, 1]$ ise, A'nın en büyük elemanı vardır. A'nın en küçük elemanı benzer biçimde tanımlanır.

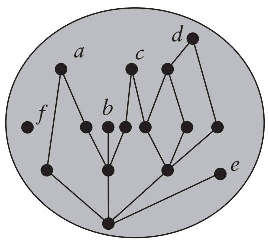
A'nın en büyük elemanı (eğer varsa) bir tanedir, çünkü a ve b, A'nın en büyük elemanlarıysa hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ eşitsizlikleri geçerli olduğundan $a = b$ olur.

Alıştırmalar

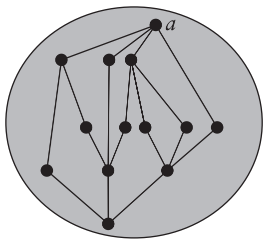
2.3.1.1. X ve Y sıralamalarının en büyük elemanları varsa, $X \times Y$ alfabetik sıralamasının da en büyük elemanı olduğunu gösterin.

2.3.1.2. $X \times Y$ alfabetik sıralamasının en büyük elemanı varsa, X ve Y sıralamalarının da en büyük elemanları olduğunu gösterin.

2.3.2. Maksimal ve Minimal Elemanlar. A'nın ***maksimal*** elemanları her $x \in A$ için $x \not> a$ özelliğini sağlayan $a \in A$ elemanlarıdır. Yani a'nın A'nın maksimal elemanı olması için, A'da a'dan büyük eleman olmamalı, ama yukarıdakinin tersine, bu sefer A'da a ile karşılaştırılamayan elemanlar olabilir. Burada da, bir önceki tanımda olduğu gibi, a'nın A'da olması gerektiğine dikkatinizi çekerim.



maksimal elemanlar: a, b, c, d, e, f



en büyük eleman: a

En büyük eleman, eğer varsa, tek maksimal elemandır. Ama aşağıdaki şekildeki örnekte de görüleceği üzere maksimal elemanlardan birkaç tane olabilir.

Bir tamsıralamada en büyük elemanla maksimal eleman arasında fark yoktur ve bu durumda en büyük eleman $\max A$ olarak gösterilir.

A'nın ***minimal*** elemanları benzer şekilde tanımlanırlar.

Sonlu bir sıralı kümede mutlaka minimal ve maksimal elemanlar olmak zorundadır.

$(\mathbb{Z} \setminus \{1\}, |)$ sıralamasının en küçük elemanı yoktur. Ama bu sıralamada asal sayılardan daha küçük eleman olmadığından, asal sayılar bu sıralamanın minimal elemanlarıdır.

2.3.3 Hemen Sonraki ve Hemen Önceki Elemanlar. $(X, <)$ bir sıralama ve $x \in X$ olsun. Verdiğimiz tüm örneklerde, belki son eleman dışında, her elemandan hemen sonra gelen en az bir eleman vardı. Örneğin bölünmeyle tanımlanmış Örnek 2.0.5'te hem 4, hem 6, hem de 10 sayıları 2'den hemen sonra gelen elemanlar. Ama $(\mathbb{Q}, <)$ ya da $(\mathbb{R}, <)$ sıralamalarında hiçbir elemandan **hemen sonra** gelen bir eleman yoktur, çünkü her $a < b$ için, örneğin,

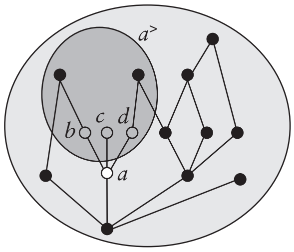
$$a < (a + b)/2 < b$$

eşitsizlikleri sağlanır. $(\wp(E), \subset)$ sıralamasında E dışında her elemandan hemen sonra gelen bir (ya da daha çok) eleman vardır.

Eğer $x \in X$ ise, (x, ∞) kümesini

$$(x, \infty) = \{y \in X : x < y\}$$

olarak tanımlayalım. (Burada, ∞, yepyeni bir simgedir; X'te ∞ diye bir elemanın olmadığını varsayıyoruz.) O zaman x'ten ***hemen sonra gelen elemanlar*** (x, ∞) kümesinin en küçük elemanlarıdır. Yani bir $y \in X$ elemanı eğer $x < y$ eşitsizliğini sağlıyorsa ve hiçbir $z \in X$ için $x < z < y$ eşitsizlikleri sağlanmıyorsa, o zaman y, x'ten hemen sonra gelen elemanlardan biridir. Bir sonraki şeklin açıklayacı olduğunu sanıyoruz.



a'dan hemen sonra gelen elemanlar: b, c, d

Eğer x'ten hemen sonra gelen eleman bir taneyse, bu eleman x^+ olarak yazılır. x'ten ***hemen önce gelen elemanlar*** benzer biçimde tanımlanırlar.

Eğer bir sıralamada her $a < b$ için, $a < c < b$ eşitsizliklerini sağlayan bir c elemanı varsa o zaman bu sıralamaya ***yoğun sıralama*** denir. $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalardır ama $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$'nin doğal sıralamaları yoğun sıralamalar değildir. $(\wp(E), \subset)$ sıralaması da yoğun bir sıralama değildir, örneğin, eğer $a \in E$ ise, $\emptyset$ ile $\{a\}$ arasında bir başka eleman yoktur.

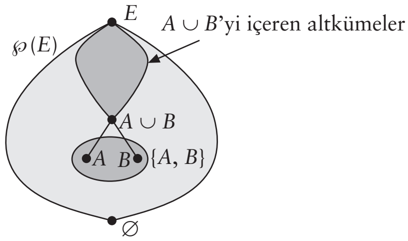
Yoğun sıralamalarda hiçbir zaman bir elemandan hemen sonraki ya da bir elemandan hemen önceki elemanlar olmaz. Ama yoğun bir sıralamada en küçük ya da en büyük elemanlar olabilir; örneğin $[0, 1]$ kapalı aralığı (doğal sıralamayla) böyle bir sıralamadır.

2.3.4. Üstsınır ve Altsınır. $(X, <)$ bir sıralama olsun. A, X'in bir altkümesi olsun. A'nın tüm elemanlarından büyükeşit olan X'in bir elemanına A'nın ***üstsınırı*** adı verilir. Demek ki b'nin A'nın bir üstsınırı olabilmesi için her $a \in A$ için $a \le b$ eşitsizliği sağlanmalıdır. ***Altsınır*** benzer biçimde tanımlanır.

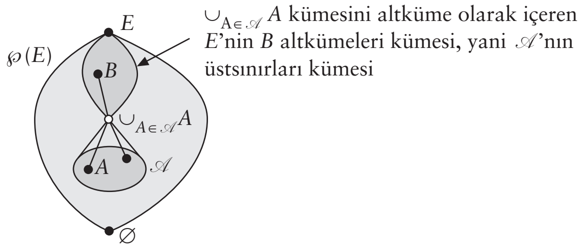
Birkaç örnek verelim. $X = \mathbb{R}$ (doğal sıralamayla) olsun. 1 ve 1'den büyük her gerçel sayı hem $[0, 1]$ hem de $(0, 1)$ aralıklarının üstsınırıdır. Ama örneğin $\mathbb{R}$'de $\mathbb{Z}$'nin üstsınırı yoktur.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer A sonlu bir kümeyse, A'daki sayıların en küçük ortak çarpımına bölünen her sayı A'nın bir üstsınırıdır; en küçük ortak çarpım da en küçük üstsınırdır. Bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı 0'dır. Ancak $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasında, sonsuz altkümelerin üstsınırı yoktur.

Şimdi örnek olarak $(\wp(E), \subset)$ sıralamasını ele alalım. $A, B \subseteq E$ olsun, yani $A, B \in \wp(E)$ olsun. O zaman $\{A, B\}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesidir. E'nin, hem A'yı hem de B'yi (altküme olarak) içeren bir altkümesi, yani E'nin $A \cup B$'yi içeren bir altkümesi $\{A, B\}$'nin bir üstsınırıdır. $A \cup B$ de $\{A, B\}$ altkümesinin bir üstsınırıdır ve üstsınırların en küçüğüdür.



$(\wp(E), \subset)$ sıralamasında $\wp(E)$'nin her altkümesinin bir üstsınırı vardır. E bunlardan biridir elbette. (Bir sıralamanın en büyük elemanı her altkümenin üstsınırıdır elbette!) Eğer $\mathscr{A}$, $\wp(E)$'nin bir altkümesiyse, o zaman E'nin $\cup_{A\in\mathscr{A}} A$ altkümesi ve bu altkümenin her üstkümesi $\mathscr{A}$'nın bir üstsınırıdır. Elbette, $\cup_{A\in\mathscr{A}} A$, $\mathscr{A}$'nın üstsınırlarının en küçüğüdür.



2.3.5. En Küçük Üstsınır. $(X, <)$ bir sıralama olsun. A, X'in bir altkümesi olsun. $A^{\geq}$, A'nın üstsınırları kümesini temsil etsin:

$$A^{\geq} = \{x \in X : \text{her } a \in A \text{ için } a \leq x\}.$$

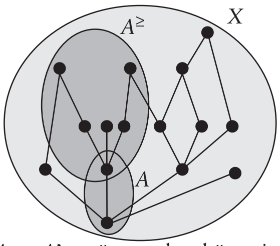
Eğer $x \in X$ için, $[x, \infty)$ kümesini

$$[x, \infty) = \{y \in X : x \leq y\}$$

olarak tanımlarsak,

$$A^{\geq} = \cap_{a \in A} [a, \infty)$$

olur.



A ve A'nın üstsınırları kümesi $A^{\geq}$

$A^{\geq}$ kümesinin en küçük elemanına (eğer varsa) A'nın ***en küçük üstsınırı*** adı verilir. Demek ki A'nın en küçük üstsınırı, her şeyden önce A'nın bir üstsınırıdır ve ayrıca A'nın tüm üstsınırlarından küçükeşittir.

A'nın ***en küçük üstsınırı***, eğer varsa, bir tanedir, çünkü hem a hem de b, A'nın en küçük üstsınırlarıysa, o zaman hem $a \leq b$ hem de $b \leq a$ olur, yani $a = b$ olur.

A'nın en küçük üstsınırı sup A olarak gösterilir. En büyük altsınır benzer biçimde tanımlanır ve inf A olarak gösterilir.

A'nin en büyük elemanı varsa o zaman bu eleman A'nın en küçük üstsınırıdır. Ayrıca eğer A'nın en küçük üstsınırı varsa ve A'daysa, o zaman bu eleman A'nın en büyük elemanı olmak zorundadır.

$(\mathbb{N}, <)$ ve $(\mathbb{Z}, <)$ sıralamalarında, üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin en küçük üstsınırı vardır, ancak aynı şey $(\mathbb{Q}, <)$ sıralaması için doğru değildir. Örneğin,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ise A'nın üstsınırları vardır (örneğin 5) ama A'nın en küçük üstsınırı yoktur, çünkü $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Öte yandan,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 5\} \subseteq \mathbb{Q}$$

kümesinin $\mathbb{Q}$'deki en küçük üstsınırı 5'tir.

$(\mathbb{R}, <)$ sıralamasında üstsınırı olan ve boş olmayan her altkümenin bir en küçük üstsınırı vardır. Bunu [Sİ]'de kanıtladık.

$(\mathbb{Z}, |)$ sıralamasında, eğer A sonlu bir kümeyse, A'daki sayıların en küçük ortak çarpımına (ekok) bölünen her sayı A'nın bir üstsınırıdır ve en küçük ortak çarpım bu sonlu kümenin en küçük üstsınırıdır. 0 her altkümenin üstsınırıdır. Sonsuz altkümelerin üstsınırı 0'dır. Öte yandan $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, |)$ sıralamasında sonsuz kümelerin en küçük üstsınırı yoktur çünkü bu sıralamada sonsuz kümelerin üstsınırı yoktur.

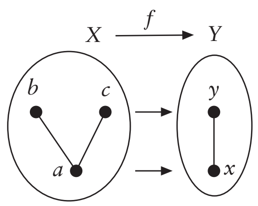
2.4. Sıralamaların Eşyapı Fonksiyonları

$(X, <)$ ve $(Y, \prec)$ iki sıralama olsun. Eğer X'ten Y'ye giden bir f fonksiyonu her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \prec f(x_2) \tag{1}$$

koşulunu sağlıyorsa, yani sıralamaya saygı duyuyorsa, o zaman f'ye (sıralamaların) ***eşyapı fonksiyonu*** adı verilir. Bu fonksiyonlara ***mutlak artan fonksiyonlar*** da denir.

Bir eşyapı göndermesi birebir olmak zorunda değildir. Örneğin $X = \{a, b\}$ boşsıralamayla sıralanmışsa ve $Y = \{c\}$ ise, X'ten Y'ye giden sabit c fonksiyonu yukardaki koşulu sağlar ama birebir değildir elbet. Aşağıda birebir olmayan bir başka eşyapı fonksiyonu örneği var. Bu örnekte $f(a) = x < y = f(b) = f(c)$.



Yukardaki örnekten de görüleceği üzere, bir f eşyapı fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için,

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \preccurlyeq f(x_2) \tag{2}$$

koşulunu sağlamayabilir.

Öte yandan (2) koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu, ki bunlara ***artan fonksiyonlar*** denir, birebir olmalıdır. Nitekim, eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise, hem $f(x_1) \leq f(x_2)$ hem de $f(x_2) \leq f(x_1)$ olduğundan, hem $x_1 \leq x_2$ hem de $x_2 \leq x_1$ koşulları sağlanır; dolayısıyla $x_1 = x_2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla eğer f fonksiyonu (2) koşulunu sağlıyorsa (1) koşulunu da sağlar.

Bu aşamada fikir değiştirip bir eşyapı fonksiyonundan (1) yerine daha güçlü olan (2) koşulunu sağlamasını isteyebiliriz. Şöyle de yapabiliriz: (1) koşulunu sağlayanlara <-***eşyapı fonksiyonu***, (2) koşulunu sağlayanlara ≤-***eşyapı fonksiyonu*** diyebiliriz. Demek ki ≤-eşyapı fonksiyonları <-eşyapı fonksiyonularıdır ama bunun tersi doğru değildir. Hangisinin sözkonusu olduğu bilindiğinde kısaca ***eşyapı fonksiyonu*** diyeceğiz. (Aşağıda göreceğimiz üzere tamsıralamalarda böyle bir ayrım yapmak gereksizdir.)

Eşyapı fonksiyonlarının birkaç özelliği:

a. İki eşyapı fonksiyonunun bileşkesi bir eşyapı fonksiyonudur.

b. Özdeşlik fonksiyonu Id_X, X'ten X'e giden bir eşyapı fonksiyonudur.

c. Eğer f bir eşyapı eşlemesiyse (yani birebir ve örtense), o zaman f^{-1} de bir eşyapı fonksiyonudur.

Bunların kolay kanıtını okura bırakıyoruz.

Eğer X bir tamsıralamaysa, X'ten Y'ye giden bir <-eşyapı fonksiyonu birebir olmak zorundadır. Nitekim $f(x_1) = f(x_2)$ olsun. Eğer $x_1 < x_2$ ise $f(x_1) < f(x_2)$ olur ve bu bir çelişkidir. Eğer $x_2 < x_1$ ise benzer şekilde bir çelişki elde edilir. Demek ki $x_1 = x_2$. Ayrıca birebir bir <-eşyapı fonksiyonu bir ≤-eşyapı fonksiyonu olmak zorundadır. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz. Demek ki tamsıralamalarda bu iki kavram arasında bir ayrım yok. Dolayısıyla X bir tamsıralama olduğunda iki kavram örtüşür.

Eşyapı eşlemeleri bir sıralamayı aynen kendisine benzeyen bir sıralamaya götürler, yani eğer $f : X \to Y$ bir eşyapı eşlemesiyse, X'in sıralamasıyla Y'nin sıralaması, elemanlarının adları dışında aynıdır. Bu iki sıralamanın elemanlarının adlarını silersek arada bir fark göremeyiz. Aralarında eşyapı eşlemesi olan sıralamalara ***eşyapısal sıralamalar*** diyeceğiz. Örneğin, eğer f bir eşyapı eşlemesiyse,

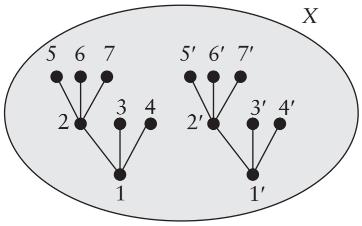
a) X'in bir en küçük elemanı varsa ve bu eleman a ise, Y'nin de en küçük elemanı vardır ve bu eleman $f(a)$'dır.

b) x'in bir sonraki elemanı varsa $f(x)$'in de bir sonraki elemanı vardır ve $f(x^+) = f(x)^+$ eşitliği sağlanır.

c) Her $x \in X$ için $f(x, \infty) = (f(x), \infty)$ eşitliği sağlanır.

d) Eğer $A \subseteq X$ ise ve $\sup A$ varsa, $\sup f(A)$ da vardır ve $f(\sup A)$'ya eşittir.

Eğer $X = Y$ ve sıralamalar aynıysa, eşyapı eşlemesi yerine ***özyapı eşlemesi*** denir. Basit bir örnek olarak aşağıdaki sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.



1 ve 1′ elemanlarını sabit tutarak ama 5, 6 ve 7 elemanlarını, 3 ve 4 elemanlarını, 5′, 6′ ve 7′ elemanlarını, 3′, 4′ elemanlarını kendi aralarında dilediğimiz gibi değiştirerek

$$3! \times 2! \times 3! \times 2! = 144$$

tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Ayrıca sağdaki ve soldaki parçaları tahmin edilebileceği biçimde (n'yi n' elemanına ve n' elemanını n'ye yollayarak, bu eşleşmeye τ diyelim) değiş tokuş edebiliriz. Böylece toplam $144 \times 2 = 288$ tane eşyapı eşleşmesi elde ederiz. Başka da eşyapı eşleşmesi yoktur. Bunu kanıtlayalım. φ, böyle bir eşyapı eşleşmesi olsun. O zaman φ, X'in minimal elemanlarını yani 1 ve 1′ elemanlarını gene X'in minimal elemanlarına gönderir. Eğer $\varphi(1) = 1'$ ise, $\varphi \circ \tau$ de bir eşyapı eşleşmesidir ama bu kez bu yeni eşleşme 1 ve $1'$ elemanlarını sabitler. Gerekirse φ yerine $\varphi \circ \tau$ eşleşmesini alarak φ'nin 1 ve $1'$ elemanlarını sabitlediğini varsayabiliriz. Bu koşulları sağlayan bir φ'nin yukardaki 144 eşleşmeden biri olacağı malum.

Eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralamaları arasında bir eşyapı eşlemesi varsa, o zaman $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da (eğer sıralamalar biliniyorsa ya da çok barizse) kısaca $X \approx Y$ yazılır.

Şimdi birkaç sıralamanın özyapı eşleşmelerini bulalım.

Teorem 2.1. $(\mathbb{N}, <)$ *sıralamasının bir tek özyapı eşleşmesi vardır*: $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ *özdeşlik fonksiyonu.*

Kanıt. f bir eşyapı eşleşmesi olsun. f, en küçük eleman olan 0'ı gene 0'a göndermelidir. Tümevarımla f'nin n'yi n'ye gittiğini varsayarsak,

$$f(n^+) = f(n)^+ = n^+$$

olur (neden?) ve böylece f'nin her elemanı sabitlediği kanıtlanır. Yani $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$'dir. □

Teorem 2.2. $(\mathbb{Z}, <)$ *sıralamasının özyapı eşleşmeleri belli bir* $n \in \mathbb{Z}$ *için* $f_n x = x + n$ *eşitliğini sağlayan* f_n *fonksiyonlarıdır.*

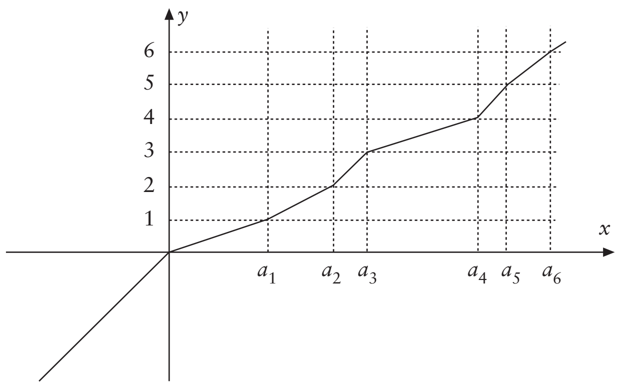
Kanıt: Her f_n fonksiyonunun artan bir eşleşme (yani özyapı eşleşmesi) olduğu belli. Şimdi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ artan bir eşleşme olsun. $f(0) = n$ olsun. x üzerine tümevarımla, her $x \in \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği şöyle kanıtlanır:

$$f(x + 1) = f(x^+) = f(x)^+ = (x + n)^+ = (x + n) + 1 = (x + 1) + n.$$

Benzer şekilde (x^+ yerine x^- kullanarak) her $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ için $f(x) = x + n$ eşitliği kolaylıkla kanıtlanır. □

$(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının çok özyapı eşleşmesi vardır. Aşağıdaki şekilden anlaşılacağı üzere, her

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$$



altkümesi için, $(\mathbb{Q}, <)$ sıralamasının ayrı bir özyapı eşleşmesi bulunabilir.

Teorem 2.3. *X herhangi bir küme olsun. $\wp(X)$, X'in altkümeleri kümesi olsun. Her $f : X \to X$ fonksiyonu için*

$$\varphi_f : \wp(X) \to \wp(X)$$

fonksiyonunu, her $A \in \wp(X)$ için,

$$\varphi_f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$$

olarak tanımlayalım. φ_f, $(\wp(X), \subseteq)$ sıralamasının bir özyapı eşleşmesidir, yani her $A, B \in P(X)$ için,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

olur. Ayrıca her $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ özyapı eşleşmesi, belli bir $f : X \to X$ eşleşmesi için, φ_f'ye eşittir.

Kanıt: i. Önce $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ eşitliğini kanıtlayacağız. $\varphi(A) = \emptyset$ olsun (φ örten olduğundan böyle bir A var.) A'nın herhangi bir B altkümesini alalım. Verilen koşuldan dolayı, $\varphi(B) \subseteq \varphi(A) = \emptyset$, yani $\varphi(B) = \emptyset$. Demek ki $\varphi(B) = \emptyset = \varphi(A)$. Bundan da, φ birebir olduğundan, $B = A$ çıkar. A'nın bir tek altkümesi olduğunu kanıtladık. Demek ki $A = \emptyset$.

ii. Şimdi, tek elemanlı kümelerin tek elemanlı kümelere gittiğini göstereceğiz. $A = \{x\}$ olsun. B, $\varphi(A)$'nın bir altkümesi olsun. C, $\varphi(C) = B$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan, böyle bir C

vardır.) Demek ki $\varphi(C) = B \subseteq \varphi(A)$. Soruda verilen koşuldan dolayı $C \subseteq A$. Ama A tek elemanlı bir küme. Dolayısıyla ya $C = \emptyset$ ya da $C = A$. Sonuç olarak,

$$\text{ya } B = \varphi(C) = \varphi(\emptyset) = \emptyset \text{ ya da } B = \varphi(C) = \varphi(A).$$

Demek ki $\varphi(A)$'nın sadece iki altkümesi var: $\emptyset$ ve $\varphi(A)$. Dolayısıyla $\varphi(A)$ tek elemanlı bir kümedir.

iii. Eğer $x \in X$ ise, $\varphi(\{x\})$ kümesinin tek elemanlı olduğunu yukarda kanıtladık. $\varphi(\{x\})$ kümesinin o tek elemanına $f(x)$ diyelim:

$$\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

Böylece X'ten X'e giden bir f fonksiyonu tanımlamış oluruz.

Eğer $a \in A \subseteq X$ ise, $\{a\} \subseteq A$, dolayısıyla $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$ ve $f(a) \in \varphi(A)$. Demek ki $f(A) \subseteq \varphi(A)$. Daha eşitliği bilmiyoruz.

φ birebir olduğundan, f'nin de birebir olduğu kolaylıkla kanıtlanır. Öte yandan daha f'nin örten olduğunu da bilmiyoruz.

iv. Şimdi f'nin örten olduğunu kanıtlayacağız. $a \in X$ olsun. $A = \{a\}$ olsun. X'in B altkümesi $\varphi(B) = A$ eşitliğini sağlasın (φ örten olduğundan böyle bir B vardır.) B'nin tek elemanlı bir küme olduğunu kanıtlayacağız. Soruda verilen koşuldan ve φ'nin birebir olmasından dolayı B'nin sadece iki altkümesi vardır: Eğer $C \subseteq B$ ise, $\varphi(C) \subseteq \varphi(B) = A = \{a\}$, yani ya $\varphi(C) = \emptyset = \varphi(\emptyset)$ ya da $\varphi(C) = A = \varphi(B)$, yani ($\varphi$ birebir olduğundan) ya $C = \emptyset$ ya da $C = B$. İki altkümesi olan kümeler tek elemanlı kümeler olduğundan B'nin tek bir elemanı vardır. Eğer $b \in B$ ise,

$$\{f(b)\} = \varphi(\{b\}) = \varphi(B) = A = \{a\}$$

ve $f(b) = a$. Demek ki f örtenmiş. Şimdi artık f'nin bir eşleşme olduğunu biliyoruz.

v. Artık, her $A \subseteq X$ için, $f(A) = \varphi(A)$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. iii'te $f(A) \subseteq \varphi(A)$ ilişkisini kanıtladık. $b \in \varphi(A)$ olsun. $f(a) = b$ eşitliğini sağlayan a elemanını alalım (iv'te f'nin örten olduğunu kanıtlamıştık.) $\varphi(\{a\}) = \{f(a)\} = \{b\} \subseteq \varphi(A)$ olduğundan, soruda verilen koşuldan dolayı, $\{a\} \subseteq A$, yani $a \in A$, yani $b = f(a) \in f(A)$. Demek ki $\varphi(A) \subseteq f(A)$.

Şimdi artık, her $A \subseteq X$ için, $\varphi(A) = f(A)$ eşitliğini biliyoruz. Yani $\varphi = \varphi_f$. □

Şimdi de şu ilginç soruya yanıt arayalım: Ya bir önceki teoremde

$$\text{her } A, B \in P(X) \text{ için } A \subseteq B \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşulunu

$$\text{her } A, B \in P(X) \text{ için } A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

koşuluyla değiştirirsek ne olur? Bu son özelliği sağlayan

$$\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$$

eşleşmelerine ***yarı-özyapı eşleşmesi*** diyelim.

Teorem 2.4. *($\wp(X), \subseteq$) sıralamasının yarı-özyapı eşleşmeleri özyapı eşleşmeleridir.*

Kanıt: $\varphi : \wp(X) \to \wp(X)$ bir yarı-özyapı eşleşmesi olsun. φ'nin bir $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından belirlendiğini kanıtlayacağız. Çeşitli aşamalardan geçeceğiz.

Sav 1. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = \emptyset$ eşitliğini sağlasın. Soruda verilen koşula göre A'nın her altkümesi boşkümenin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın sadece bir altkümesi vardır. Bundan da A'nın boşküme olduğu anlaşılır.

Sav 2. $\varphi(X) = X$.

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'yı içeren her altküme, φ altında, X'i içeren bir altkümeye, yani X'e gitmek zorunda. Demek ki A'yı içeren tek bir küme vardır, dolayısıyla $A = X$'tir.

Sav 3. *$y \in X$ olsun. $A \subseteq X$ altkümesi, $\varphi(A) = \{y\}$ eşitliğini sağlasın. O zaman A'nın tek bir elemanı vardır.*

Kanıt: Soruda verilen koşula göre, A'nın her altkümesi $\{y\}$ kümesinin bir altkümesine denk düşer. Demek ki A'nın en fazla iki altkümesi vardır. A'nın tek bir altkümesi olsaydı, $A = \emptyset$ olurdu ve, Sav 1'e göre, $\{y\} = \varphi(A) = \varphi(\emptyset) = \emptyset$ olurdu, ki bu bir çelişkidir. Demek ki A'nın iki altkümesi vardır. Bundan da A'nın tek elemanlı olduğu anlaşılır.

U kümesini şöyle tanımlayalım:

$$U = \{x \in X : \varphi(\{x\}) \text{ tek bir elemanlı küme}\}.$$

Şimdi de $f : U \to X$ fonksiyonunu tanımlayalım: Eğer $x \in U$ ise, $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\}$ olsun. Sav 3'e göre, f'nin, U'dan X'e giden bir eşleme olduğu bariz. Önce U'nun X'e eşit olduğunu, sonra da φ'nin $f : X \to X$ eşleşmesi tarafından verildiğini kanıtlayacağız.

Sav 4. *$y \in X$ olsun. $x \in U$ elemanı $f(x) = y$ eşitliğini sağlasın. O zaman $\varphi(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\}$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt: $A \subseteq X$ altkümesi $\varphi(A) = X \setminus \{y\}$ eşitliğini sağlasın. A'yı içeren her altküme, φ eşleşmesi altında, $X \setminus \{y\}$ kümesini içeren bir kümeye denk düşer. Demek ki A'yı içeren en fazla iki altküme vardır. Sav 2'ye göre $A \neq X$. Dolayısıyla A'yı içeren tam iki altküme vardır. Bu da, A'nın, belli bir $x \in X$ için, $A = X \setminus \{x\}$ olması demektir.

$z \in U$, $f(z) = y$ eşitliğini sağlasın. Eğer $z \neq x$ ise olacakları görelim: Her şeyden önce $\{z\} \subseteq X \setminus \{x\}$. Demek ki

$$\{y\} = \{f(z)\} = \varphi(\{z\}) \subseteq \varphi(X \setminus \{x\}) = X \setminus \{y\},$$

yani $y \in X \setminus \{y\}$, bir çelişki. Dolayısıyla $x = z \in U$ ve $f(x) = y$.

Sav 5. *Eğer $A \subseteq X$ ise,* $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A) \subseteq f(A^c \cap U)^c$.

Kanıt: $A \subseteq X$ olsun. $a \in A \cap U$ olsun. O zaman, $\{a\} \subseteq A$ ve $a \in U$ olduğundan, $\{f(a)\} = \varphi(\{a\}) \subseteq \varphi(A)$. Demek ki $f(a) \in \varphi(A)$. Bundan da $f(A \cap U) \subseteq \varphi(A)$ çıkar.

Şimdi $a \in A^c \cap U$ olsun. O zaman, $A \subseteq X \setminus \{a\}$ olduğundan ve $a \in U$ olduğundan, bir önceki sava göre,

$$\varphi(A) \subseteq \varphi(X \setminus \{a\}) = X \setminus \{f(a)\}.$$

Demek ki $f(a) \notin \varphi(A)$, yani $f(a) \in \varphi(A)^c$. Bundan da

$$f(A^c \cap U) \subseteq \varphi(A)^c$$

çıkar, yani $\varphi(A) \subseteq f(A^c \cap U)^c$.

Sav 6. *Eğer* $A \subseteq X$ *ise*, $\varphi(A) = f(A \cap U)$.

Kanıt: $f(A^c \cap U)^c = f(U \setminus (A \cap U))^c = (f(U) \setminus f(A \cap U))^c = (X \setminus f(A \cap U))^c = f(A \cap U)$ eşitliğinden ve Sav 5'ten istediğimiz çıkar.

Artık istediğimizi kanıtlayabiliriz. Sav 6'da $A = X$ alırsak,

$$\varphi(X) = f(X \cap U) = \varphi(X \cap U) = \varphi(U)$$

çıkar, yani $X = U$. Demek ki $U = X$ ve gene yukardaki sava göre

$$\varphi(A) = f(A \cap U) = f(A \cap X) = f(A).$$

Kanıtımız bitmiştir. $\square$

Alıştırma. P, $\mathbb{N}$'*nin asal sayıları kümesi olsun*. $(\mathbb{N}, |)$ *sıralamasının tüm özyapı eşleşmelerini bulun.*