Konu 24-242. Mantık II. Ödev son tarih 29 Nisan, Perşembe

Bir *A* doğal sayılar kümesinin, bir *f*, tam Σ fonksiyonu olduğu takdirde—öyle ki herhangi bir *n* için *n*, *A*’ya aittir ancak ve ancak *f*(*n*), *B*’ye aittir ise—bir B kümesine *m-indirgenebilir* (“çok-bir indirgenebilir” anlamında) olduğu söylenir.

*A*, bir *f*, bir-bir tam Σ fonksiyonu olduğu takdirde—öyle ki herhangi bir *n* için *n*, *A*’ya aittir ancak ve ancak *f*(*n*), *B*’ye aittir ise—*B* ‘ye *1-indirgenebilir*dir (“bir-bir indirgenebilir” anlamında).

1. Herhangi bir *A* kümesi için aşağıdakilerin eşit olduğunu gösterin:

(i) *A*, yinelemeli sıralıdır (yani Σ'dır)

(ii)  *A*, geçerli tümcelerin Gödel sayılarının kümesine 1-indirgenebilirdir

(iii) *A*, geçerli tümcelerin Gödel sayılarının kümesine m-indirgenebilirdir.

**(i) ⇒ (ii). Eğer *A*, yinelemeli sıralı ise *A*'yı Q içinde zayıf bir şekilde temsil eden, tek serbest değişkeni “*x*” olan bir ϕ(*x*) Σ formülü vardır. Eğer *f*(*n*)'yi ˹(Q → ϕ([*n*])˺'ye eşit olarak kurarsak (“Q”, Robinson aritmetiğinin aksiyomlarının birletimini belirtir iken) *n* *∈* *A* ancak ve ancak Q├ϕ([*n*]) ancak ve ancak (Q → ϕ([*n*])) geçerlidir ancak ve ancak *f*(*n*) *∈* {geçerli tümcelerin Gödel sayıları} iseyi elde ederiz.**

**(ii) → (iii). Apaçık.**

**(iii) ⇒ (i). Bir *f* bir-bir tam Σ fonksiyonu alın öyle ki herhangi bir *n* için *n* *∈* *A* ancak ve ancak *f*(*n*) *∈* {geçerli formüllerin Gödel sayıları} iseyi elde edelim; bir ϕ(*x,y,z*) sınırlı formülü bulabiliriz öyle ki herhangi bir n ve m için *f*(*n*) = *m* ancak ve ancak (∃*z*)ϕ([*n*],[*m*],*z*) doğrudur iseyi elde ederiz. Geçerli formüllerin Gödel sayılarının kümesinin Σ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden bir ψ(*x,y*) sınırlı formülü vardır öyle ki herhangi bir *m* için *m*, geçerli bir tümcenin Gödel sayısıdır ancak ve ancak (∃*y*)ψ([*m*],*y*) doğrudur ise. Bu durumda herhangi bir *n* için *n ∈ A* ancak ve ancak Σ formülü olan (∃*y*)(∃*z*)(∃*w*)(ϕ([*n*],*y,z*)** ⋀ **ψ(*y,w*)) doğrudur ise.**

2. Bir Σ tam fonksiyonuna genişletilemeyen bir Σ kısmi fonksiyonunun bir örneğini verin.

***f*, eğer girdi Q'nün bir teoremi(nin Gödel sayısı) ise 1 değerini, eğer girdi Q içinde çürütülebilir bir tümce ise 0 değerini veren ve aksi takdirde tanımsız olan kısmi fonksiyon olsun. *f* bir Σ kısmi fonksiyonudur ama bir Σ tam fonksiyonuna genişletilemez çünkü eğer *g* böylesi bir fonksiyon olsaydı *x*'i max(*g*(*x*), 1)'e götüren Σ tam fonksiyonu Q'nün teoremlerini Q içinde çürütülebilir tümcelerden ayıran yinelemeli bir kümenin karakteristik fonksiyonu olacaktı.**