Konu 24.242. Mantık II. Ödev5 Örneklerine Cevaplar

İşte sınıfta ya da notlarda türettiğimiz bazı PA teoremleri. Aşağıdaki problemlerde onları kullanmak isteyebilirsiniz: **(Başvuru için bu teoremleri (D1)'den (D6)'ya doğru adlandıracağım):**

**(D1)** (∀x)(∀y)(x + y) = (y + x)

**(D2)** (∀x)(∀y)(∀z)((x + y) + z) = (x + (y + z))

**(D3)** (∀x)(x∙[1]) = x

**(D4)** (∀x)(∀y)(x∙y) = (y∙x)

**(D5)** (∀x)(∀y)(∀z)((x∙y)∙z) = (x∙(y∙z))

**(D6)** (∀x)(∀y)(∀z)((x + y)∙z) = ((x∙z) + (y∙z))

1. “(∀x)(∀y)(∀z)(x E (y+z)) = ((xEy)∙(xEz))”nin bir PA teoremi olduğunu gösterin.

 **Bunu indukşın yoluyla ispatlarız. Temel tümce “(x E (y + 0)) = ((xEy)∙(xE0)”dır aşağıdaki gibi ispatlanır:**

 **(x E (y + 0))**

 **= (x E y) [(Q3) yoluyla]**

 **= ((x E y) ∙ [1]) [(D3) yoluyla]**

 **= ((x E y) ∙ (x E 0)) [(Q7) yoluyla]**

 **Sonra, indukşın adımı için. İnduktif hipotez olarak varsayınız ki:**

 **(x E (y + z)) = ((x E y) ∙ (x E z)).**

 **Şunu göstermek istiyoruz:**

 **(x E (y + sz)) = ((x E y) ∙ (x E sz)).**

 **(x E (y + sz))**

 **= (x E s(y + z)) [(Q4) yoluyla]**

 **= ((x E (y + z)) ∙ x) [(Q8) yoluyla]**

 **= (((x E y) ∙ (x E z)) ∙ x) [TH yoluyla]**

 **= ((x E y) ∙ ((x E z) ∙ x)) [(D5) yoluyla]**

 **((x E y) ∙ (x E sz)) [(Q8) yoluyla]**

2. 𝔄, PA'nın standart olmayan bir modeli iken 𝔄'daki bütün standart sayılar tarafından sağlanan ama 𝔄'nun herhangi bir standart olmayan elemanı tarafından sağlanmayan, aritmetik dilinin herhangi bir ϕ(x) formülünün olmadığını gösterin.

 **Eğer ϕ(x) böylesi bir formül olsaydı 0 standart olduğundan ϕ(0), 𝔄 içinde geçerli olacaktı ve standart bir elemanın ardılı her zaman standart olduğundan (∀x)(ϕ(x) → ϕ(sx)) de 𝔄 içinde geçerli olacaktı. Fakat 𝔄 standart olmayan elemanlar içerdiğinden (∀x)ϕ(x), 𝔄 içinde geçerli değildir. Bu yüzden indukşın aksiyomu ((ϕ(0)** ⋀ **(∀x)(ϕ(x) → ϕ(sx))) → (∀x)ϕ(x), 𝔄 içinde başarısız olur.**