

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Ders Notları 16

Konrad Menzel

9 Nisan 2009

1. Genel Sınav Kuralları

- 2nci Sınav gelecek hafta Salı günü sınıfta yapılacak ve saat tam 9:00'da başlayacak.
- İlgili materyal: öncelik son sınavdan sonra işlenen konularda olacak ancak elbette kendinizi yoğunluk, olasılık ve dersin ilk üç çeyreğindeki diğer kavramlar konusunda rahat hissetmelisiniz.
- problem setlerindeki daha metinsel sorular olacak, hesaplamalarda daha az yorucu olacak.
- normal dağılım tablosu dağıtılacaktır, bu nedenle yanınızda getirmeniz gerekmiyor
- esas itibarıyla ilk sınavın formatının aynısı olacak
- hesap makinesi getiriniz
- kitaplar ve notlar kapalı olacak
- süre aşağı yukarı 85 dakika olacak
- Kısmi puan verilecektir, bu nedenle bütün soruları cevaplandırmaya çalışınız

2. Tekrar

2.1 Rasgele Değişkenlerin Fonksiyonları

Genel olarak:

- X 'in p.d.f.si $f_X(x)$ 'i bil (kesikli veya sürekli)
- Y X 'in bilinen bir fonksiyonudur, $Y = u(X)$
- p.d.f. $f_Y(y)$ 'yi nasıl bulacağınla ilgilen

p.d.f. $f_Y(y)$ 'yi bulmanın yolu X 'in sürekli veya kesikli veya $u(\cdot)$ fonksiyonun bire-bir olup olmamasına bağlıdır. Üç yöntem vardır:

1. Eğer X kesikli ise

$$f_Y(y) = \sum_{\{x:u(x)=y\}} f_X(x)$$

2. Eğer X sürekli ise 2-adımlı bir yöntem vardır:

Adım 1: c.d.f. $F_Y(y)$ 'i elde et

$$F_Y(y) = P(u(X) \leq y) = \int_{\{x:u(x) \leq y\}} f_X(x) dx$$

Adım 2: p.d.f.yi elde etmek için c.d.f.nin türevini al

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$$

3. eğer (a) X sürekli ve (b) $u(\cdot)$ bire-bir ise, değişken değiştirme formülünü kullan

$$f_Y(y) = f_X(s(y)) \left| \frac{d}{dy} s(y) \right|$$

Tartıştığımız birkaç önemli örnek:

- Bükülme formülü: eğer X ile Y bağımsız ise, o zaman $Z = X + Y$ 'nin p.d.f.si

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - w) f_X(w) dw$$

Not: Eğer X ve/veya Y'nin yoğunluğu bir yerde sıfır ise, integralin limitleri konusunda dikkatli ol.

- Integral Dönüştürme: Eğer X sürekli ise, o zaman rasgele değişken $Y = F_X(X)$ uniform dağılımıdır. Burada $F_X(\cdot)$ X'in c.d.f.sidir.
- Sıra İstatistiği: Eğer X_1, \dots, X_n i.i.d ise, o zaman en düşük k'nci değer Y_k 'nin p.d.f.si

$$f_{Y_k}(y) = k \binom{n}{k} F_X(y)^{k-1} (1 - F_X(y))^{n-k} f_X(y)$$

2.2. Beklentiler

2.2.1 Beklenen Değer

X'in Beklenen değerinin tanımı

- Eğer X kesikli ise,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_x x f_X(x)$$

- Eğer X sürekli ise,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Beklenen değer önemli özellikleri

1. sabit a için

$$\mathbb{E}[a] = a$$

2. X'in doğrusal fonksiyonu, $Y = aX + b$, için

$$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b$$

3. 2 veya daha fazla rasgele değişken için

$$\mathbb{E}[a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n\mathbb{E}[X_n] + b$$

4. Eğer X ile Y *bağımsız* ise, o zaman

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

- beklenen değer X'in dağılımının *konumunun* ölçüsüdür
- $Y = u(X)$ fonksiyonun beklenen değeri (kesikli durumda integrali toplam ile değiştirin)

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f_X(x) dx$$

- Jensen Eşitsizliği: Eğer $u(\cdot)$ *konveks* ise, o zaman

$$\mathbb{E}[u(X)] \geq u(\mathbb{E}[X])$$

2.2.2. Varyans

Şöyle tanımlanır:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

X 'in *yayılmasının* ölçüsüdür.

Varyansın önemli özellikleri

1. bir a sabit değeri için

$$\text{Var}(a) = 0$$

2. varyansın diğer bir ifade şekli

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

3. X_1, \dots, X_n *bağımsız* rasgele değişkenlerin bir doğrusal fonksiyonu için

$$\text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + \dots + a_n^2 \text{Var}(X_n) + b$$

4. *Herhangi* X_1, X_2 değişkenleri için daha genel olarak

$$\text{Var}(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1^2 \text{Var}(X_1) + 2a_1 a_2 \text{Cov}(X_1, X_2) + a_2^2 \text{Var}(X_2)$$

2.2.3. Kovaryans ve Korelasyon

Kovaryans

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])(X - \mathbb{E}[X])]$$

olarak tanımlanır

Kovaryansın özellikleri

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y)$$

Eğer X ve Y bağımsız ise, $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Korelasyon katsayısı şöyle tanımlanır:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Burada eğer sadece ve sadece Y X 'in deterministik doğrusal bir fonksiyonu ise,

$$\rho(X, Y) \in [-1, 1]$$

ve

$$|\rho(X, Y)| = 1$$

2.2.4. Koşullu Beklenen Değer

Koşullu beklenen değer *rasgele değişkeni* şöyle tanımlanır.

$$\mathbb{E}[Y|X] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|X) dy$$

Koşullu beklenen değer ile ilgili iki önemli sonuç:

- Yinelenen Beklentiler Kanunu

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}[Y]$$

- Koşullu Varyans

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]) + \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)]$$

2.3 Özel Dağılımlar

2.3.1. Özet

Aşağıdaki dağılımlara bakıldı:

- Uniform: $X \sim U[a, b]$ eğer X 'in p.d.f.si aşağıdaki gibiyse

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{eğer } a \leq x \leq b \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

- Binom: $X \sim B(n, p)$ eğer X 'in p.d.f.si aşağıdaki gibiyse

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{eğer } x \in \{0, 1, \dots, n\} \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

- Üstel: $X \sim E(\lambda)$ eğer X 'in p.d.f.si aşağıdaki gibiyse

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{eğer } x \geq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

- Normal: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ eğer X 'in p.d.f.si aşağıdaki gibiyse

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Poisson: $X \sim P(\lambda)$ eğer X 'in p.d.f.si aşağıdaki gibiyse

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & \text{eğer } x \in \{0, 1, 2, \dots\} \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Her bir dağılımın ortalamasını ve varyansını bilmeniz veya hesaplamayı öğrenmeniz gerekir. Ayrıca, Binom ile Poisson ve Binom ile Normal arasındaki ilişkilerde gösterildi.

2.3.2. Normal Dağılım

Rasgele değişkenleri nasıl standardize edildiğini bilmeniz gerekir:

$$Z = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

Size standart normalin c.d.f.lerinin tablosunun bir kopyasını vereceğim, tabloyu nasıl okuyacağınızı bilmeniz gerekiyor.

Normal dağılım ile ilgili önemli sonuçlar:

1. normal p.d.f. ortalama etrafında simetrik.
2. normal rasgele değişkenlerin doğrusal fonksiyonları yine normal dağılımlıdır:
Eğer $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, o zaman $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ 'dir.
3. bağımsız normal rasgele değişkenlerin toplamı da normal dağılımlıdır.

4. Merkezi Limit Teoremi: i.i.d. örneklemi X_1, \dots, X_n için standardize örneklem ortalaması büyük n 'ler için yaklaşık olarak standart bir normal dağılımdır.

2.4. Asimptotik Teorisi

2.4.1 Ana Fikir

- her zaman i.i.d. örneklem X_1, \dots, X_n varsay
- sadece örneklem ortalamasıyla ilgilen

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- X_i 'nin dağılımı hakkındaki bilgimiz veri iken, kesin değeri/dağılımı bulmak çok zordur, hatta imkânsızdır
- deney " $n \rightarrow \infty$ "ın büyük n 'ler için tahmin verdiği varsayılır.

2.4.2. Büyük Sayılar Kanunu

- Chebyshev Eşitsizliği: herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

- Büyük Sayılar Kanunu: Eğer X_1, \dots, X_n i.i.d. ise, o zaman bütün $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon) = 0$$

- bağımsızlık varsayımı önemlidir("Kabalıkların bilgeliği"ndeki olaylar arasındaki korelasyon örneği gibi)
- $V(X_i) < \infty$ gereklidir, böylece Büyük Sayılar Kanun (LLN) çok şişman kuyruklu dağılımlarda çalışmaz.

2.4.3. Merkezi Limit Teoremi

- standardize edilmiş örneklem ortalamasının dağılımına bakınız
- Merkezi Limit Teoremi: Varyansı $\text{Var}(X_i) < \infty$ olan bir i.i.d örneklemi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x \right) = \Phi(x)$$

burada $\Phi(\cdot)$ normal c.d.f.dir.

- Rasgele binom değişkenleri için DeMoivre-Laplace teoremini gösteren grafikler gördük.

3. Örnek Problemler

Örnek 1. Bahar 2003 Sınavı, problem 3

Cambridge'deki Baldwin okulunda üçüncü sınıf öğretmeni Bay Bayson terfi almak üzeredir ve bunun gerçekleşme ihtimali kısmen öğrencilerinin MCAS sınavındaki performansına bağlıdır. On öğrencisi vardır ve sınavda on soru sorulacaktır. Varsayalım ki her öğrencinin her soruyu doğru cevaplandırma şansı %60'tır, ve bütün soruların cevapları birbirinden bağımsızdır. En yüksek notu alan öğrencisinin on üzerinde en az dokuz alma olasılığı nedir? En düşük notu alan öğrencisinin on üzerinden en az üç alma olasılığı nedir?

Çözüm:

Bu sorunun iki bölümünün olduğuna dikkat etmeniz gerekir: (1) bireysel test sonuçlarının dağılımını belirlemek ve (2) maksimumun ve minimumun c.d.f.lerini bulmak.

Her bir öğrencinin sınav notu olan X 10 bağımsız denemenin başarı sayısı olduğu için, X p.d.f.sini bildiğimiz bir binom rasgele değişkendir, $X \sim B(10, 0.6)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{10}{x} 0.6^x 0.4^{10-x} & \text{eğer } x \in \{0, 1, \dots, 10\} \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

Genel olarak, bir i.i.d örneklem X_1, \dots, X_n 'nin maksimumu olan Y_1 aşağıdaki c.d.f.ye sahiptir. Burada X 'in c.d.f.si $F_X(x)$ 'tir.

$$F_{Y_1}(y) = F_X(y)^n$$

ve minimum Y_2 'nin c.d.f.si

$$F_{Y_2}(y) = 1 - (1 - F_X(y))^n$$

Veri bir öğrencinin 9'dan düşük olma olasılığı

$$\begin{aligned}
F_X(9) &= 1 - P(X = 9) - P(X = 10) = 1 - \binom{10}{9} 0.6^9 0.4 + \binom{10}{10} 0.6^{10} \\
&= 1 - 10 \cdot \frac{2 \cdot 3^9}{5^{10}} + \frac{3^{10}}{5^{10}} = 1 - \frac{23}{5} \cdot 0.6^9
\end{aligned}$$

Dolaysıyla, en yüksek notu alan öğrencinin 10 üzerinde en az 9 alma olasılığı

$$1 - F_{Y_1}(9) = 1 - [F_X(9)]^{10} = 1 - \left(1 - \frac{23}{5} 0.6^9\right)^{10} \approx 37.79\%$$

Veri bir öğrencinin 10 üzerinde en az 3 alma olasılığı

$$1 - F_X(2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0.4^{10} - 10 \cdot 0.6 \cdot 0.4^9 - 45 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^8 = 1 - \frac{1876}{25} 0.4^8$$

Dolaysıyla, en düşük notu alan öğrencinin 10 üzerinde en az 3 alma olasılığı

$$1 - F_Y(2) = [1 - F_X(2)]^{10} \approx 60.39\%$$

Örnek 2 Bahar 2007 Sınavı, Problem 3

Eğer $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, $Y = e^X$ 'in log-normal dağılım olduğunu söyleriz, $Y \sim L(\mu, \sigma^2)$

(a) Y'nin p.d.f.sini bulunuz

(b) Varsayalım ki yatırım yapmak için 100.000 dolarınız var ve R_1 getirisinin dağılımı $L(\mu, \sigma^2)$ olan bir yatırımı yapma olanağınız var. Yatırımın ortalaması $e^{\mu + \sigma^2/2}$ 1.10'dur ve varyansı $(e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2})$ 0.01'dir. Yatırımın birinci döneminin sonunda (100.000 R_1 dolar) servetinizin 110.000 dolardan daha yüksek olma olasılığı nedir?

(c) (b)'deki parametre değerlerinin aynısını kullanarak, yatırımın bağımsız iki dönemini sonunda servetinizin 115.000 dolardan daha yüksek olma olasılığı nedir?

Çözüm:

(a) Bu dönüşüm bire-birdir, bu nedenle değişken değiştirme formülünü kullanabiliriz. X'in herhangi bir reel sayı olabileceğini not ediniz ve bundan ötürü Y'nin desteği $(0, \infty)$ 'dir. Ters dönüştürme $X = \ln(Y)$ 'dir. Burada $dX/dY = 1/Y$ 'tir. Böylece, $y > 0$ için değişken değiştirme formülünü kullanarak aşağıdakini buluruz,

$$f_Y(y) = \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

diğer durumlarda

$$f_Y(y) = 0$$

(b) μ ve σ^2 'i çözerek başlamak yararlı olacaktır. Varyansın ifadesini faktörlere ayırabiliriz:

$$e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1) \text{ veya } [e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}]^2(e^{\sigma^2}-1)$$

Ortalamanın ifadesini yerine koyunca ve varyansın da 0.01 olduğu gerçeğinde hareketle $(1.10)^2(e^{\sigma^2}-1) = .01$ elde ederiz. σ 'in çözünce $\sigma \approx 0.090722098$ elde ederiz. Sonra geriye doğru gideriz ve görürüz ki $\mu \approx 0.09119493$ 'tür.

Şimdi birinci dönemin sonunda servetinizin 110000 dolardan büyük olma olasılığını bulalım. Elimizde

$$P(100000R_1 > 110000) = P(R_1 > 1.1) = P(\ln(R_1) > \ln(1.1)) = P\left(\frac{\ln(R_1)-\mu}{\sigma} > \frac{\ln(1.1)-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1.1)-\mu}{\sigma}\right) \approx 1 - \Phi(.045361051) \approx 1 - .5181 = .4819$$

var. Burada normal olasılık tablosunun kullanarak standart normal c.d.f.nin değerini bulabilirsiniz.

(c)

$$P(100000R_1R_2 > 115000) = P(R_1R_2 > 1.15) = P(\ln(R_1) + \ln(R_2) > \ln(1.15)).$$

$\ln(R_1)$ ile $\ln(R_2)$ 'nin bağımsız normal olduklarını ve dolayısıyla toplamlarının da normal olduğunu not ediniz. Ortalama ortalamaların toplamıdır ve varyans varyansların toplamıdır. Şapka işaretini yeni ortalama, varyans ve standart sapma için kullanırsak, $\hat{\mu} \approx 0.18238986$, $\hat{\sigma}^2 \approx 0.016460998$ ve $\hat{\sigma} \approx 0.128300421$ olur. Daha önceki hesaplamaları sürdürürsek,

$$P(\ln(R_1) + \ln(R_2) > \ln(1.15)) = P\left(\frac{\ln(R_1)+\ln(R_2)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} > \frac{\ln(1.15)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(1.15)-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \approx 1 - \Phi(-.3322508) \approx 1 - .3698 = .6302.$$

Örnek 3 Bahar 2007 Sınavı, Problem 4

Bir İsveç ekonomisti olan Mikael Priks bir süredir holigan aktiviteleri, kavgaları, yaralamaları, vs., üzerine İsveç polisi tarafından toplanan detaylı veri ile “Firman Boys” çetesinin üyelerinden birisinin kendi raporunu kullanarak (bkz. www.lrz-muenchen.de/ces/mikael.htm) futbol holiganları ile ilgili çeşitli ekonomik konuları çalışmaktadır. Bir makalesinde düşman holigan grupları arasında olası ve sert kavgaların nedenlerini analiz eder. Bunun için, kavgalar ve yaralanmalar üzerine bir model geliştirir. Modelde bir sezonda düşman gruplarının olası karşılaşma sayısı bir $P(5)$ dağılımıdır (Poisson $\lambda = 5$). Dahası, her kavgada en az bir yaralanmanın olacağını ve gerçekte, 10’a kadar her yaralanmanın eşit olasılıklı olduğunu varsaymıştır.

- (a) söz konusu varsayımlar veri iken, bir yıl içerisinde iki düşman grubun birbirini yaralama sayısının beklenen değeri nedir? Söz konusu sayının varyansı nedir?
- (b) Varsayalım ki belirtilenlerin yerine, iki düşman grup karşılaştığında kavga olma olasılığı sadece $1/2$ ’dir (olası karşılaşmaları bağımsız varsayabilirsiniz). (a)’ya vereceğiniz cevap nasıl değişir.

Çözüm:

- (a) X bir sezondaki kavga sayısını ve Y yaralanma sayısını ifade etsin. Ayrıca karşılaşmanın kavga ile sonuçlanacağını varsayacağız. Bu durumda, $E(Y) = E(E(Y|X)) = E(5.5X) = 5.5E(X) = 5.5(5) = 27.5$ olur. Ve $Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X)) = E(\frac{10^2-1}{12}X) + Var(5.5X)$. [NOT: bir kavgadaki yaralanmaların sayısının varyansı $\frac{10^2-1}{12}$ ’dir. Böylece, eğer kavgalar arası yaralanmaların dağılımı bağımsız ise, X sayıdaki kavgada yaralanma sayısının varyansı $\frac{10^2-1}{12}X$ olur.] Hesaplamalara devam edince, $E(\frac{10^2-1}{12}X) + Var(5.5X) = (99/12)E(X) + (121/4)Var(X) = (99/12)(5) + (121/4)(5) = 192.5$ elde ederiz.

- (b) Z karşılaşma ihtimalini ifade etsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(E(E(Y|X)|Z)) = E(E(5.5X|Z)) = E(5.5(E(X|Z))) = E(5.5\frac{1}{2}Z) \\ &= 2.75E(Z) = 2.75(5) = 13.75 \end{aligned}$$

Varyans için ise hala şunu söyleyebiliriz:

$$Var(Y) = E(Var(Y|\bar{X})) + Var(E(Y|X)) = \frac{99}{12}E(X) + \frac{121}{4}Var(X)$$

Aslında şimdi $E(X)$ ve $Var(X)$ (a)'dakine göre değişmiş oldu. $E(X)$ 'in önceki değerinin yarısı kadar olduğunu görmek zor değil (şimdi 2.5'tir). $p = 0.5$ ve Z kadar deneme ile $X|Z$ bir binom olduğu gerçeğini kullanarak, X 'in varyansı şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(Var(X|Z)) + Var(E(X|Z)) = E(Z(.5)(1 - .5)) + Var(.5Z) = .25E(Z) + .25Var(Z) \\ &= .25(5) + .25(5) = 2.5. \end{aligned}$$

Geriye doğru gidince

$$Var(Y) = \frac{99}{12}E(X) + \frac{121}{4}Var(X) = \frac{99}{12}(2.5) + \frac{121}{4}(2.5) = 96.25$$

elde ederiz.

Örnek Problemler

Bahar 2003 Sınavı, problem 3

Cambridge'deki Baldwin okulunda üçüncü sınıf öğretmeni Bay Bayson terfi almak üzeredir ve bunun gerçekleşme ihtimali kısmen öğrencilerinin MCAS sınavındaki performansına bağlıdır. On öğrencisi vardır ve sınavda on soru sorulacaktır. Varsayalım ki her öğrencinin her soruyu doğru cevaplandırma şansı %60'tır, ve bütün soruların cevapları birbirinden bağımsızdır. En yüksek notu alan öğrencisinin on üzerinde en az dokuz alma olasılığı nedir? En düşük notu alan öğrencisinin on üzerinden en az üç alma olasılığı nedir?

Bahar 2007 Sınavı, Problem 3

Eğer $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, $Y = e^X$ 'in log-normal dağılım olduğunu söyleriz, $Y \sim L(\mu, \sigma^2)$

(a) Y 'nin p.d.f.sini bulunuz

(b) Varsayalım ki yatırım yapmak için 100.000 dolarınız var ve R_1 getirisinin dağılımı $L(\mu, \sigma^2)$ olan bir yatırımı yapma olanağınız var. Yatırımın ortalaması $e^{\mu + \sigma^2/2}$ 1.10'dur ve varyansı $(e^{2(\mu + \sigma^2)} - e^{2\mu + \sigma^2})$ 0.01'dir. Yatırımın birinci döneminin sonunda (100.000 R_1 dolar) servetinizin 110.000 dolardan daha yüksek olma olasılığı nedir?

- (c) (b)'deki parametre değerlerinin aynısını kullanarak, yatırımın bağımsız iki dönemini sonunda servetinizin 115.000 dolardan daha yüksek olma olasılığı nedir?

Bahar 2007 Sınavı, Problem 4

Bir İsveç ekonomisti olan Mikael Priks bir süredir holigan aktiviteleri, kavgaları, yaralamaları, vs., üzerine İsveç polisi tarafından toplanan detaylı veri ile “Firman Boys” çetesinin üyelerinden birisinin kendi raporunu kullanarak (bkz. www.lrz-muenchen.de/ces/mikael.htm) futbol holiganları ile ilgili çeşitli ekonomik konuları çalışmaktadır. Bir makalesinde düşman holigan grupları arasında olası ve sert kavgaların nedenlerini analiz eder. Bunun için, kavgalar ve yaralanmalar üzerine bir model geliştirir. Modelde bir sezonda düşman gruplarının olası karşılaşma sayısı bir $P(5)$ dağılımıdır (Poisson $\lambda = 5$). Dahası, her kavgada en az bir yaralanmanın olacağını ve gerçekte, 10'a kadar her yaralanmanın eşit olasılıklı olduğunu varsaymıştır.

- (a) söz konusu varsayımlar veri iken, bir yıl içerisinde iki düşman grubun birbirini yaralama sayısının beklenen değeri nedir? Söz konusu sayının varyansı nedir?
- (b) Varsayalım ki belirtilenlerin yerine, iki düşman grup karşılaştığında kavga olma olasılığı sadece $1/2$ 'dir (olası karşılaşmaları bağımsız varsayabilirsiniz). (a)'ya vereceğiniz cevap nasıl değişir.