

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

Ders Notları 10

Konrad Menzel

12 Mart 2009

1. İntegralin Limitinin Dönüşüm Formülünün Örneği

$$f_{xy} = \begin{cases} 4xy & \text{eğer } 0 < x, y < 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases}$$

$Z = X/Y$ 'nin p.d.f.si nedir?

1.1. Yaklaşım 1. “2-adım” yöntemi, çok karmaşık

- $x/y \leq 2$ olan (x, y) 'yi bul.
- (x, y) 'ler üzerinden $f_{XY}(x, y)$ 'nin integralini alarak c.d.f. $F_Z(z)$ 'yi elde et.
- $F_Z(z)$ 'nin türevini alarak p.d.f. $f_Z(z)$ 'yi elde et.

→ bunu yapmayacağız çünkü daha kolay bir yaklaşım var.

1.2. Yaklaşım 2: Değişkenin-değişimi formülü

- Problem: $z = u_1(x, y) = x/y$ bir boyutlu, $u(.)$ bire-bir olamaz.
- Çözüm: yeni bir değişken tanımla, $w = u_2(x, y) = XY \rightarrow \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{bmatrix}$ 'nin tersini al.

$$S_1(w, z) = \sqrt{wz} = \sqrt{xy \cdot \frac{x}{y}} = \sqrt{x^2} = X$$
$$S_2(w, z) = \sqrt{\frac{w}{z}} = \sqrt{\frac{xy}{x/y}} = \sqrt{y^2} = Y$$

(x, y 'nin 1 olasılıkla pozitif olduğunu not ediniz.)

⇒Ters fonksiyon

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(w, z) \\ S_2(w, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{WZ} \\ \sqrt{W/Z} \end{bmatrix}$$

⇒Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial W} & \frac{\partial S_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial S_2}{\partial W} & \frac{\partial S_2}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z}{2\sqrt{WZ}} & \frac{W}{2\sqrt{WZ}} \\ \frac{1/Z}{2\sqrt{W/Z}} & -\frac{W/Z^2}{2\sqrt{W/Z}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J)$$

$$\det(J) = -\frac{ZW/Z^2}{4W} - \frac{W/Z}{4W} = -\frac{1}{2Z}$$

- (W, Z)'nin birleşik p.d.f.sini elde etmek için formül kullan

$$\begin{aligned} f_{wz}(w, z) &= f_{xy}(s_1(w, z), s_2(w, z)) |\det(J)| \\ &= \begin{cases} 4s_1(w, z)s_2(w, z) \cdot \left| -\frac{1}{2z} \right| & \text{eğer } 0 < s_1(w, z), s_2(w, z) < 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4W}{2Z} = 2\frac{W}{Z} & \text{eğer } w, z > 0 \text{ ve her iki } (*) \begin{cases} W < Z \\ W < 1/Z \end{cases} \text{ ise} \\ 0 & \text{diğer bütün durumlarda} \end{cases} \end{aligned}$$

Koşul (*) aşağıdakinden gelir

$$1 > s_1(w, z) = \sqrt{wz} \Rightarrow w < 1/z$$

ve

$$1 > s_2 = \sqrt{w/z} \Rightarrow w < z$$

- Aşağıdakini nasıl elde ederiz?

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{wz}(w, z)dw?$$

- $W \leq 0$ için $f_{wz}(w, z)$ sıfırdır
- $W > \min(Z, 1/Z)$ için $F_{wz}(w, z)$ sıfırdır
- Bundan ötürü,

$$\begin{aligned}
 f_z(z) &= \int_0^{\max(0,\min(z,1/z))} 2\frac{W}{Z}dw = \left|\frac{W^2}{Z}\right|_0^{\max(0,\min(z,1/z))} \\
 &= \begin{cases} z & \text{if } 0 < z < 1/z & \Leftrightarrow & 0 \leq z < 1 \\ 1/z^3 & \text{if } 0 < 1/z < z & \Leftrightarrow & 1 \leq z \\ 0 & \text{if } z < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$