

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş Ders Notları 20

Konrad Menzel

30 Nisan 2009

1. Güven Aralığı (devam)

Sonraki örnek tahmin edicinin dağılımının normal olmadığı durumlarda güven aralığı oluşturmanın bir yolunu göstermektedir.

Örnek 1. Varsayalım ki X_1, \dots, X_n i.i.d.'dir, dağılımı $X \sim U[0, \theta]$ 'dir ve θ_0 için %90'lık güven aralığı oluşturmak istiyoruz.

$$\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\} = X_{(n)}$$

Yukarıdaki ifade n 'nci sıra istatistiği olsun (önceki derslerde gösterildiği üzere bu aynı zamanda bir maksimum olabilirlik tahmin edicisidir). Daha önce gördüğümüz gibi, $\hat{\theta}$ θ için sapmasız olmamasına rağmen, onu θ için bir güven aralığı oluşturmakta kullanabiliriz. Sıra istatistiğinin sonuçlarından gördük ki $\hat{\theta}$ 'nin c.d.f.sini veren $\hat{\theta}$ 'in c.d.f.si aşağıdaki gibi belirlenmektedir:

$$F_{\hat{\theta}}(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } \theta \leq 0 \text{ ise} \\ \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n & \text{eğer } 0 < \theta \leq \theta_0 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } \theta > \theta_0 \text{ ise} \end{cases}$$

burada $U[0, \theta_0]$ olan bir rasgele değişkenin c.d.f.sini, $F(x) = x/\theta_0$, yerine koyduk,

A ve B fonksiyonlarını elde etmek için, önce a ve b sabit değerlerini bulalım,

$$P_{\theta_0}(a \leq \hat{\theta} \leq b) = F_{\hat{\theta}}(b) - F_{\hat{\theta}}(a) = 0.95 - 0.05 = 0.9$$

a ve b değerlerini aşağıdakileri çözünce bulabiliriz

$$F_{\hat{\theta}}(a) = 0.05 \text{ and } F_{\hat{\theta}}(b) = 0.95$$

böylece $a = \sqrt[n]{0.05\theta_0}$ ve $b = \sqrt[n]{0.95\theta_0}$ 'i elde ederiz. Bu bize henüz bir güven aralığı vermemektedir, çünkü güven aralığının tanımına göre biz gerçek θ_0 değerini eşitsizliğin

ortasında isteriz. Ve her iki tarafın fonksiyonları sadece veriye ve diğer bilinmeyen büyüklükler bağlıdır.

Ancak aşağıdakini yazabiliriz,

$$0.9 = P_{\theta_0}(a \leq \hat{\theta} \leq b) = P_{\theta_0} \left(\sqrt[n]{0.05}\theta_0 \leq \hat{\theta} \leq \sqrt[n]{0.95}\theta_0 \right) = P_{\theta_0} \left(\frac{\hat{\theta}}{\sqrt[n]{0.95}} \leq \theta_0 \leq \frac{\hat{\theta}}{\sqrt[n]{0.05}} \right)$$

Bundan ötürü aşağıdaki θ_0 için bir %90'lık güven aralığıdır.

$$[A, B] = [A(X_1, \dots, X_n), B(X_1, \dots, X_n)] = \left[\frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{0.95}}, \frac{\max\{X_1, \dots, X_n\}}{\sqrt[n]{0.05}} \right]$$

Bu durumda, aralığın sınırları sadece $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ tahmin ediciler aracılığıyla veriye bağlıdır. Bu genel olarak doğru olmak zorunda değildir.

Şimdi güven aralığına nasıl ulaştığımızı tekrarlayalım:

1. önce $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ tahmin edicileri ve $\hat{\theta}$ 'in dağılımını elde et,
2. aşağıdaki koşulu sağlayacak olan $a(\theta)$ ve $b(\theta)$ 'yi bul

$$P(a(\theta) \leq \hat{\theta} \leq b(\theta)) = 1 - \alpha$$

3. θ 'yi çözerek olayı yeniden yaz

$$P(A(X) \leq \theta \leq B(X)) = 1 - \alpha$$

4. $A(X)$, $B(X)$ değerlerini gözlemlenen örneklem X_1, \dots, X_n 'i kullanarak bul,
5. $1 - \alpha$ 'lık güven aralığı aşağıdaki ile verilir:

$$\widehat{CI} = [A(X_1, \dots, X_n), B(X_1, \dots, X_n)]$$

1.1 Önemli Durumlar

1. $\hat{\theta}$ normal dağılımlıdır, $\text{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma_{\hat{\theta}}^2$ bilinmiyor: Güven aralığı aşağıdaki gibi oluşturulabilir

$$[A(X), B(X)] = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\sigma_{\hat{\theta}}^2} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \hat{\theta} + \sqrt{\sigma_{\hat{\theta}}^2} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

2. $\hat{\theta}$ normal dağılımlıdır, $\text{Var}(\hat{\theta})$ bilinmiyor fakat $\hat{S}^2 = \widehat{\text{Var}}(\hat{\theta})$ tahmin edicisi var: Güven aralığı aşağıdaki ile verilir

$$[A(X), B(X)] = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\hat{S}^2} t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right), \hat{\theta} + \sqrt{\hat{S}^2} t_{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Burada $t_{n-1}(p)$ değeri $n - 1$ serbestlik dereceli t-dağılımının p nci yüzdeliğidir.

3. $\hat{\theta}$ normal değil, fakat $n > 30$ veya daha fazla: öyle anlaşıyor ki gördüğümüz bütün tahmin ediciler(uniform dağılım için örneklemin maksimumu hariç) merkezi limit teoremine göre asimptotik olarak normaldir (Merkezi Limit Teorisini nasıl uygulayacağımız konusu her zaman açık değil değildir). Bu durumda güven aralığını 2'deki gibi oluştururuz.
4. $\hat{\theta}$ normal değil, n küçük: eğer $\hat{\theta}$ 'in p.d.f.si biliniyor ise, 1'nci kullanılarak güven aralığı oluşturulabilir(son örnekteki gibi). Eğer p.d.f. bilinmiyor ise, yapabileceğimiz bir şey yok.

2nci durumda t dağılımını kullanmamızın nedeni şudur: $\hat{\theta} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ olduğu için,

$$\frac{\hat{\theta} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Diğer taraftan, şunu kontrol edebiliriz

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

burada \hat{S} genellikle ortalaması sıfır ve varyansı σ^2 olan normal hataların karelerinin toplamı için yazılır. Dolayısıyla,

$$\frac{\hat{\theta} - \mu}{\sqrt{\hat{S}^2/n}} = \frac{\frac{\hat{\theta} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}/(n-1)}} \sim \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi_{n-1}^2}} \sim t_{n-1}$$

Ayrıca 4'ün genel durumunda (ve uniform içeren son örnekte), $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ istatistiğinin herhangi bir şeyin sapmasız ve tutarlı tahmin edicisi olmasını istemedik, fakat gerçek parametrede kesin monoton olmak zorundaydı. Ancak, normal durumlar($\hat{\theta}$ 'in varyansı hakkında bilgi sahip olsak ta olmasak ta) ve durum 3 için güven aralığını oluşturduğumuzda, tutarlı olmak zorundaydık.

2 Hipotez Testi

2.1 Ana Fikir

Fikir: bir kitleden elde edilen bir rasgele örneklem verilmiş olsun, kitle hakkındaki bazı iddialara karşı çıkmak için yeterince kanıt var mıdır? Önce bazı önemli kavramları tanımlayalım:

- bir *hipotez* bir kitledeki (popülasyon) bir rasgele değişkenin dağılımı hakkında bir varsayımdır
- *sabit*(maintained) hipotez test edilemeyen ancak ne olursa olsun doğru olduğu varsayılan bir hipotezdir.
- *test edilebilir hipotez* rasgele bir değişkenden elde edilen kanıtlara göre test edilebilir ve test edilecek bir hipotezdir.
- *boş hipotez* test edilecek bir hipotezdir
- *alternatif hipotez* boş hipotez dışında kitle hakkındaki diğer olası varsayımdır.

Test problemi X_1, \dots, X_n örneklemini elde ettiğimiz yoğunluk $f(x|\theta_0)$ ile ilintili olan θ_0 parametresinin Θ_0 olası parametre değerler kümesine ait olup olmaması olarak ifade edilebilir. Genellikle boş hipotezi aşağıdaki gibi yazarız:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

Bunu aşağıdaki alternatif hipoteze karşı test ederiz.

$$H_A : \theta \in \Theta_A$$

burada $\Theta_0 \cap \Theta_A = \emptyset$

Eğer $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ sadece bir tek parametre değeri içerirse, hipotezin *basit* olduğunu söyleriz. Bir *bileşik* hipotez birden fazla değer veya bir sayı aralığının tümünü içeren bir Θ kümesi tarafından verilir.

Örnek 2. En yaygın kurulumuyla, H_0 basittir ve H_A bileşiktir. Örneğin, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 bilinmiyor ve $\mu = 0$ olup olmadığını test etmek istiyoruz. Bu kurulumda, sabit hipotez X_i 'ler i.i.d. normal ve $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ 'dir. Boş hipotez $H_0 : \mu = 0$ (basit)'tir ve bunu alternatif hipotez $H_0 : \mu \neq 0$ (bileşik)'e karşı test etmek istiyoruz.

Hipotezi test etmek için veri toplamak zorundayız ve veriye dayanarak boş hipotezi ret veya kabul edebiliriz. Ancak, verimiz her zaman bütün kitlenin bir örnekleme olduğu için, verdiğimiz kararlarda hata yapma ihtimalimiz vardır. Belirli bir test için 1. Tip hata yapma olasılığı şöyle verilir:

$$\alpha = P(1.\text{Tip Hata}) = P(\text{Ret}|H_0)$$

Bu testin *güvenirlik düzeyi* (aynı zamanda büyüklüğü) olarak adlandırılır. Eğer aşağıdaki ifadeyi yazarsak,

$$\beta = P(2.\text{Tip Hata}) = P(\text{Ret etme}|H_A)$$

o zaman $1 - \beta$ testin *gücüdür*.

		Doğanın Gerçek Hali	
		H_0 doğru	H_0 yanlış
Karar	ret H_0	Tip I hata	doğru
	ret etme H_0	doğru	Tip II hata

Genellikle testin güvenilirlik düzeyini oluştururuz, örneğin % 5 gibi ve daha sonra güvenilirlik testi veri iken en yüksek güce sahip bir test oluşturmaya çalışırız. Dolayısıyla sanki boş hipotezi ret etmeme hatasını yapmayı tercih ediyoruz.

Bunun arkasındaki mantık ilk başta sezgisel algılamaya ters gibi görünür halbuki bu gözlemlerden, bütün kitleye genelleştirilen ampirik sorundan veya bilimsel kanundan kaynaklanmaktadır. Bilimsel kanun: kitle hakkındaki hipotezimizi doğrulayan birkaç an yakalamış bile olsak, uymayan bir an gözlemlemek çürütmek için yeterlidir. Bu nedenle ampirik kanıtları sadece bir hipotezi ret etmek için kullanabiliriz, hiçbir zaman kanıtlamak için değil. Aşağıdaki Bertand Russel'in meşhur bir örneğidir:

“Evcilleştirilmiş hayvanlar kendilerini normalde besleyen kişileri gördüğü zaman yiyecek beklerler. Oldukça kaba bu davranışın tekdüzeliği, yanlıgıların sorumlusu olduğunu biliriz. Tavukları ömürleri boyunca her gün besleyen adam sonunda onun boynunu koparır, sanki doğanın tekdüzeliği tavuklar için yararlanmış bakış açısına ince bir ayar yapar gibi. [...] Gerçek olan şu ki, bir şeyin belli sayıda tekrarlanmış olması hayvanlarda ve insanlarda aynı şeyin tekrar olacağı beklentisinin oluşmasına neden olur. İçgüdümüz kesinlikle yarın güneşin doğacağına bizi inandırır, fakat beklenmeyen bir şekilde boynu kopartılan tavuktan daha iyi durumda olmayabiliriz.” (Russell, The Problems of Philosophy) ,

Bu nedenle, eğer, örneğin, belli bir ilacın hastanın durumunu belirgin bir şekilde iyileştirdiği konusunda bir kanıt sunmak istersek, boş hipotez H_0 : “ilacın hastanın durumu üzerinde hiçbir etkisi yoktur” olur. Bu hipotezi ret etmek, ilacın etkisi konusunda çok güçlü kanıt bulduğumuz anlamına gelir. Yani her zaman boş hipotezi çürütmek istediğimiz ifade olarak belirliyoruz.

Başka bir örnek olarak, hukuk sistemini düşünebiliriz: “bir süreçte, iki tarafta “suçlu” veya “suçsuz” şeklinde bir sonuca ulaşmak için ortaya veri (kanıtlar) sürerler ve jüri yine de iki hata yapabilir: masum bir kişiyi suçlu bulabilir (1. Tip Hata) ya da bir suçluyu suçsuz bulabilir (2. Tip Hata). Modern hukuk sistemlerinin çoğu yargılamaları kişinin suçsuz olduğu varsayımına dayandırır, yani şüphelinin “suçu ispatlanan kadar masum” olduğu varsayılır. Başka bir ifade ile, suçu ispatlamanın yükü yargıca veya jüriye, şüphelinin gerçekten de suçlu olduğu konusunda ikna etmek için yeterli kanıtı ortaya koymak zorunda olan savcıya biner.

Hipotez testlere göre alınan kararlar, alternatifin doğru olmasına karşı boş hipotezin doğruluğu için başta belirtilen olasılığı görmezlikten geldiğimiz manasında optimal olmak zorunda değildir ve 1. Tip ile 2. Tip hataları yapmanın ilgili maliyetlerini hesaba katmazlar. Hukuk sistemi için, ön suçlamayı (preemption) savunanlar bir çok konuda, örneğin terörizm gibi, 2. Tip hatanın çok pahalıya mal olabileceğini sık sık tartışır. Bu nedenle hukuk sistemi bazı vakalarda suçsuzluk varsayımı için istisnalara izin vermelidir.

Toparlayacak olursak, X_1, \dots, X_n örnekleminin her bir olası olayını “ret etme” ile “ret etmeme” kararına bağlayacak bir kural formüle etmek istiyoruz.