

MIT OpenCourseWare  
<http://ocw.mit.edu>

14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş  
Bahar 2009

Bu materyale atıfta bulunmak ve kullanım koşulları için <http://ocw.mit.edu/terms> sayfasını ziyaret ediniz.

# 14.30 Ekonomide İstatistiksel Yöntemlere Giriş

## Ders Notları 1

Konrad Menzel

3 Şubat 2009

### 1. Giriş ve Genel Bakış

Bu ders size Olasılık Teorisi'ne girişi ve İstatistiğin temel araçlarını verecektir. Olasılık, ilgili belirleyicilerini tam olarak bilmediğimiz durumları açıklayan ve analiz eden bir matematiksel yapıdır. Modern hayatta, hepimiz, tıptan sosyolojiye kadar bütün alanlarda yapılan istatistiksel çalışmaların düzenli müşterileriyiz ve olasılık muhakemesi ekonomi ve finans alanında son dönemde yapılan bir çok tartışmanın takip edilmesinde oldukça önemlidir.

Bu dersin ilk yarısında, olaylarda bulunan gerçek riski - veya kişisel bilgi yetersizliğimizi- açıklamanın bir yolu olarak olasılık üzerinde konuşacağız.

**Örnek 1.** *Kredibilitesi düşük müşterilere verilen kredi de (Subprime lending), bankalar normal müşterilerine göre geri ödeme olasılıkları daha düşük olan müşterilere yeni nesil ev kredisi ( mortgage) verirdi. Teminat olarak gösterebilecekleri fazla şeyleri olmayan olası ev sahiplerine borç verme riskini idare etmek için, bu şekilde verilen binlerce kredi bir demet haline getirilip “mortgage destekli değerli kağıt” olarak yeniden satılırdı, yani krediyi ilk veren bankaya ne kadar geri ödeme yapılırsa yapılsın, banka değerli kağıdı elinde tutanlara söz verdiği miktarı ödemeyi taahhüt ederdi. Sonunda, değerli kâğıtlar havuzunun bir kaç çeşit tahvile dönüştüğü çok karmaşık finansal düzenlemeler ortaya çıktı. Burada ilk tahvili elinde tutanlara ödemede öncelik verilirdi. Yani, diyelim ki, tahvilin nominal değeri 10 milyon dolardır, geri ödemeler toplamı ne zaman 10 milyon doları aşarsa önce bu gruba ödeme yapılıyordu. Bu durumda, ne zaman önceliği olanlardan para artarsa ancak o zaman nominal değeri düşük gruba ödemeler yapılabilirdi.*

*Nasıl olur da, belirtilen herhangi bir yeni nesil ev kredisi güvenli değilken, bir çok risk barındıran bir havuzdan oluşan ilk grup güvende olabiliyordu? Daha düşük önceliği olanlar daha riskli oluyorlardı. – Niye? Geriye doğru bakıldığında, niye piyasanın beklediğinin aksine daha güvenli olan değerli kağıtlar piyasadaki herkesin beklediğinden daha riskli oldular? Büyük Sayılar Kanunu hakkında konuşurken, ve hangi koşullarda çalışıp hangi koşullarda çalışmadığını belirttikten sonra, bu konuya geri döneceğiz.*

Genellikle, bu tür soruları cevaplandırmak için, sonuçların dağılımı (nispi olabilirlik gibi) hakkında çok şey bilmeniz gerekir, fakat bazı durumlarda daha azı ile de idare edersiniz: Bazı durumlarda bir sonucun sadece beklenen değeri veya bir dağılımın diğer momentleri gibi “tipik” değerleri ile ilgilenirsiniz. Diğer durumlarda sadece rasgele bir deneyin çok sayıdaki tekrarının ortalaması ile ilgileniyor olabilirsiniz ve böyle durumlarda her bir deneyin farklı sonuçlarının olabilirliği konusunda çok şey bilmeden büyük rakamlar kanunu veya merkezi limit teoremi bazen size iyi bir tahmin verebilir.

Dersin ikinci yarısı, veriden kitle ve olasılık dağılımları hakkında nasıl bilgi edinileceği sorusuyla ilgili olacaktır. Herhangi bir ampirik bilimde, tümevarım problemi ile karşılaşabilirsiniz. Tümevarım birkaç (belki biraz daha çok) gözlemden genel sonuçlar çıkarmaktır. Politik yoklamalarda (“sonraki başkanlık seçiminde kimin için oy kullanacaksınız?”), bir anket firması tipik olarak yüzbinlerce potansiyel seçmen arasından en fazla birkaç bin kişiye anket uygular. Tıbbi deneylerde, bir ilacın etkinliği konusunda birkaç *düzine* katılımcıdan elde edilen sonuçlardan bütün kitle için genellemeler elde etmeye çalışırız.

Eğer ilgilendiğimiz bir kitlenin (örneğin bir genel seçimde oy kullanabilecek bütün seçmenler gibi) yalnızca bir alt-grubundaki kişileri (örneğin seçmenlerin rasgele bir örnekleme gibi) gözlemlersek, cevaplandırmak istediğimiz soru açısından (örneğin belli bir adayın oy oranı gibi) bu örneklemin gerçekten bütün kitleyi *temsil* edip etmediği konusunda bir çeşit belirsizlik olacaktır. Bu belirsizliği formüle edip kullanımını pratik hale getirmek olasılık teorisinin yoğun kullanımını gerektirir.

**Örnek 2.** *Mart 2003 yılındaki işgalden üç buçuk yıl sonra, Irak savaşında ölen siviller üzerinde yapılan tartışmalı ilk Lancet çalışmasında ülke genelinde 1849 hane halkından oluşan (toplam olarak 12801 kişi) bir rasgele örnekleme anket uygulanmıştır ve hane halkları tarafından beyan edilen ölüm sayıları, 29 Milyonluk, tüm ülkedeki ölü sayısının tahmini için kullanılmıştır. Çalışmanın yazarları, işgalden sonraki ilk 18 ay için 112 000 “fazla” ölüm tahminine ulaşılar ve “%95’lik güvenirlilikle” gerçek rakamın 69000 ile 155000 arasında olduğunu ifade ettiler. Bu ifadenin ne anlama geldiğini daha sonra derste göreceğiz. Tahminin etrafındaki güven aralığının genişliği, ufak bir alt-kitleden bütün ülke için hesaplamalar yapmanın kendi içindeki var olan belirsizliğinin ölçüsüdür. Bu politik ve duygusal etkileri olan bir konu olduğu için, çalışma bilimsel yayınlarda ve bloglarda yoğun bir tartışma başlatmıştır- tartışmaları okumak uygulamada istatistiğin gerçekten “nasıl” yapıldığı konusunda size çok şey öğretecektir.*

## 2. Küme Teorisi ve Olaylar

### 2.1 Rasgele Deneyler

**Tanım 1.** *Bir rasgele deney – en azından teorik olarak- (a) sık sık ve aynı koşullarda keyfi olarak tekrarlanabilir (b) çok iyi tanımlanmış olası sonuçlar kümesine sahiptir.*

Bunun standart örneği yazı (T) ve tura (H) gibi iki sonucu olabilen madeni para atmadır (paranın dik bir şekilde durma olasılığını görmezlikten ediyoruz). İstatistik alanının bir diğer önemli deney türü bir seçim sırasında yapılan yoklamadır. Diyelim ki oylama yapılan yerden çıkanlar arasından rasgele olarak seçilen 2000 kişiye kime oy verdiklerini sorduk. Kural olarak, seçim günü oy kullanacak kitleden keyfi olarak çok sayıda 2000 kişilik örneklem seçebiliriz. Dolayısıyla koşul (a)'yı gerçekleştirmiş oluruz. Bu deneyin sonuç kümesi, seçimde hangi aday için oy kullandığını beyan eden seçmen sayıdır.

**Tanım 2.** *Bir örneklem uzayı olan S, bir deneyin bütün olası sonuçlarının toplamıdır.*

Birçok amaçtan ötürü, esas itibariyle olayların tek sonucuyla değil, olayların bütün sonuçlar grubu ile ilgileniyoruz. Bu nedenle, izleyen bölümde deneyi kümeler cinsinden tanımlayacağız.

**Tanım 3.** *A olayı herhangi bir sonuçlar toplamı olabilir (bu, tekli sonucu, boş kümeyi veya örnek uzayın tümünü içerir).*

*Eğer gerçekleşen sonuç A olayının bir elemanı ise, o zaman A'nın gerçekleştiğini söyleyebiliriz.*

Bir örnek olarak, şimdi geçen seneki başkanlık yarışını ele alalım. En basit şekliyle, örnek uzayını (S) – mantıksal bir olabilirliği düşündüğümüzde- Kasım ayında başkan olarak seçilebilecek kişiler olarak tanımlayabilirdik (Örneğin, ilk deneme olarak ön seçimlerin başlıca adaylarına bakabilirdik).

$S = \{\text{Clinton, Huckabee, McCain, Obama, Paul, Romney, Schwarzenegger}\}$

Bu iyi bir tanımlama mı? Muhtemelen değil: Her ne kadar bunlar gerçekleşmesi en olası sonuçlar olsa da, mantıken başka adayların (bağımsız olarak veya bir partiye bağlı olarak) sonradan yarışa katılmasını görmezlikten gelmeyiz. Dolayısıyla daha hatasız, rasgele deneyin tanımı örneklem uzayını büyütecektir.

$\bar{S} = \{\text{Clinton, Huckabee, McCain, Obama, Paul, Romney, Schwarzenegger, Diğer Demokrat Aday, Diğer Cumhuriyetçi Aday, Diğer Bağımsız Aday}\}$

Ancak olayı basit tutmak için, şimdilik bu olasılığı görmezlikten gelemiz.

İlgilenilen bazı olaylar şunlar olabilir:

“44ncü Amerikan Başkanı bir cumhuriyetçi olacaktır” = {Huckabee, McCain, Paul, Schwarzenegger, Diğer Cumhuriyetçi Aday}

“44ncü başkan 42nci başkan ile evli olacaktır” = {Clinton}

## 2.2 Küme ve Olaylar Hakkında Daha Fazla Bilgi

### 2.2.1 Küme Kapsamı “ $\subset$ ”

Eğer B’nin bütün sonuçları A’ya ait ise, olay B A’nın *içindedir*. Sembolik olarak,

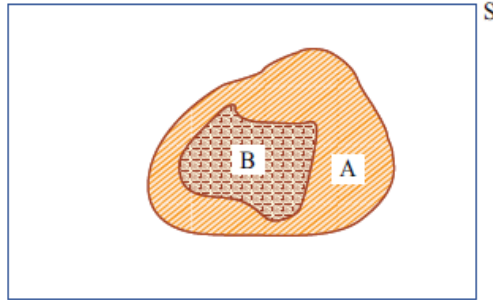
$$B \subset A \text{ eğer } (s \in B \Rightarrow s \in A)$$

Kesinlikle, herhangi bir C olayı örneklem uzayı S’de yer alır, yani

$$\text{Herhangi bir C olayı için } C \subset S$$

ve her olay imkansız olayı içerir.

$$\text{Herhangi bir C olayı için } \phi \subset C$$



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 1.  $B \subset A$  – “B A’yı gerektirir”

Eğer A ve B bir birini içerirse, eşittirler.

$$A \subset B \text{ ve } B \subset A \Rightarrow A = B$$

Ve küme kapsamı geçişlidir, yani

$$A \subset B \text{ ve } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

Başkanlık seçimi örneğimizde (eğer Wikipedia’ya güvenebilirsek, McCain Panama Kanalı kuşağında bulunan bir Amerikan hava üssünde doğmuş)

“44ncü başkan Panamada doğdu” = {McCain}  $\subset$  “44ncü başkan yabancı bir ülkede doğdu” = {McCain, Schwarzenegger}

ve

{McCain, Schwarzenegger}  $\subset$  “44ncü başkan cumhuriyetçidir”.

Sonuç olarak, aşağıdaki çıkarımı yapabiliriz:

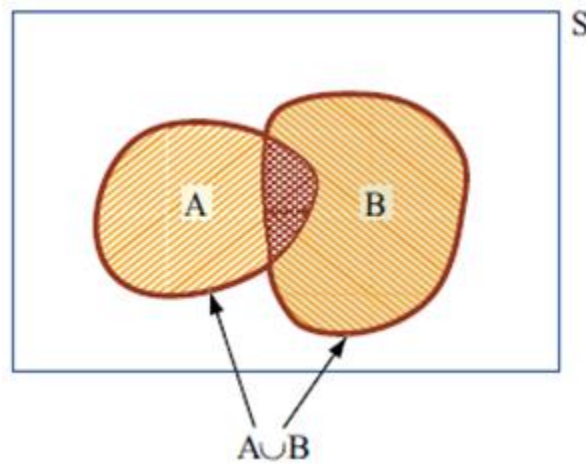
“44ncü başkan Panamada doğdu”  $\subset$  “44ncü başkan cumhuriyetçidir”

### 2.2.2 Küme Birleşimleri “ $\cup$ ”

$A$  ve  $B$ ’nin *birleşimi*,  $A$  veya  $B$ ’nin (veya her ikisinin,  $\cup$  mantıksal “veya” sembolü olan  $V$ ’nin karşılığıdır) elemanlarının bütün sonuçlarının toplamıdır

$$A \cup B = \{s \in S | s \in A \vee s \in B\}$$

Küme birleşimi simetriktir.



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 2.  $A$  ve  $B$ ’nin Birleşimi – “ $A$  veya  $B$ ”

$$A \cup B = B \cup A$$

Buna ilaveten,

Herhangi  $A, B \subset S$  olayları için  $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$

Özellikle,

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cup S = S$$

Ayrıca küme/olay birleşimini hangi sırada yaptığımızın da bir önemi yoktur (birleşim özelliği).

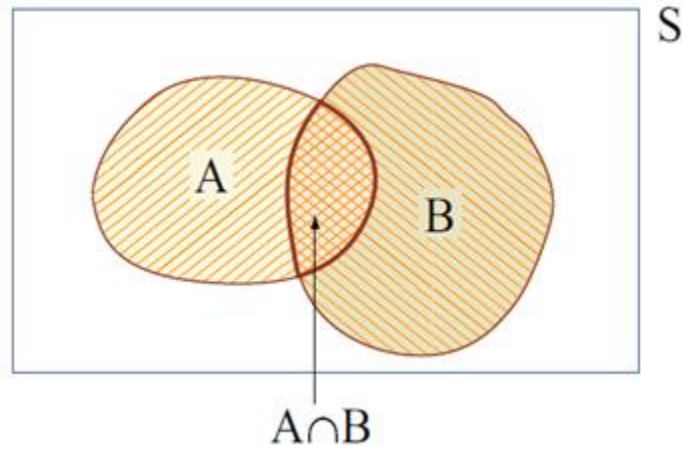
$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

### 2.2.3. Kümelerin Kesişimi “ $\cap$ ”

A ve B’nin *kesişimi* (boş olabilir) A ve B’nin ikisinde birden olan sonuçlar toplamıdır. Aşağıdaki gibi yazılır,

$$A \cap B = \{s \in S | s \in A \wedge s \in B\}$$

Burada “ $\wedge$ ” mantıksal “ve”yi ifade eder. Bazı metinlerde alternatif işaretleme kullanılır,  $A \cap B = AB$



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 3. A ve B’nin Kesişimi – “A ve B”

Kümelerin birleşimi gibi kesişimi de simetriktir.

$$A \cap B = B \cap A$$

Keza,

$$\text{Herhangi } A, B \subset S \text{ olayları için } B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$$

Buradan hareketle,

$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap S = A$$

Ayrıca, küme birleşiminde olduğu gibi, kümelerin kesişimi birleşme özeliğine sahiptir.

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

İlaveten, küme kesişimi ve birleşimi dağılma özeliğine sahiptir.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ve

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Örnek olarak, aşağıdaki olaylar için

$$A = \text{"Başkan 44 bir kadındır"} = \{\text{Clinton}\}$$

$$B = \text{"Başkan 44 Midwest'te doğdu"} = \{\text{Clinton, Romney}\}$$

$$C = \text{"Başkan 44 bir Cumhuriyetçidir"} = \{\text{Huckabee, McCain, Paul, Romney, Schwarzenegger}\}$$

birinci dağılım özeliğine göre olması gerektiği gibi, şunları görebiliriz:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{\text{Clinton}\} \cap \{\text{Clinton, Huckabee, McCain, Paul, Romney, Schwarzenegger}\} \\ &= \{\text{Clinton}\} \end{aligned}$$

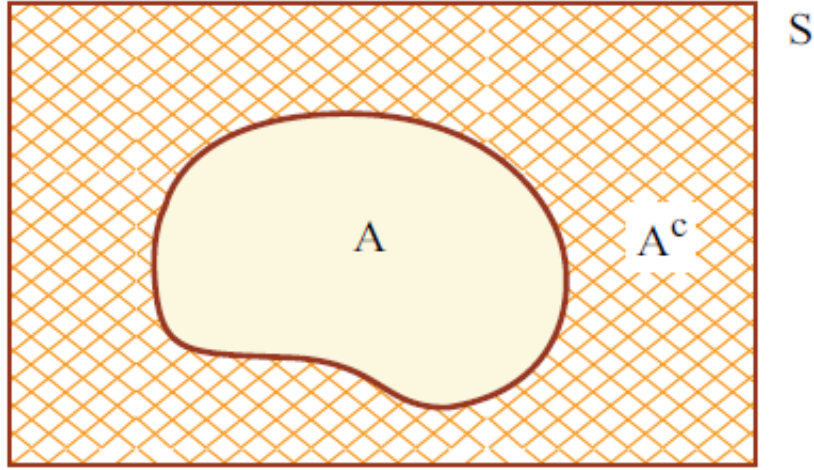
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{\text{Clinton}\} \cup \phi = \{\text{Clinton}\}$$

#### 2.2.4. Küme Tümlenyeni, $A^C$

$A$ 'nın *tümlenyeni*  $A^C$ ,  $S$ 'deki  $A$ 'ya ait olmayan sonuçlar kümesidir. Yani,

$$A^C = \{s \in S | s \notin A\} = S \setminus A$$





Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 4. A'nın Tümleyeni – “A değil”

Tanımdan, tümleyenlerin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu kolayca görebilirsiniz.

$$(A^c)^c = A$$

$$A \cup A^c = S$$

$$A \cap A^c = \phi$$

En son ifadeden, aşağıdakine ulaşabiliriz

$$S^c = \phi$$

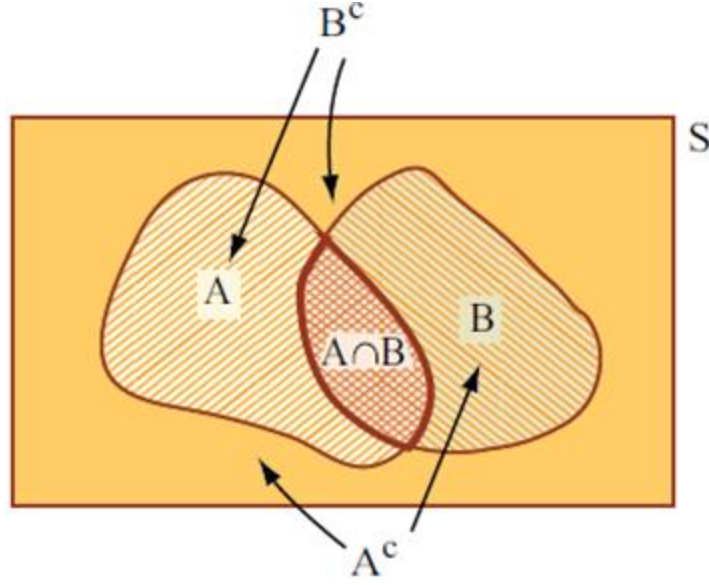
İlk özellikle beraber aşağıdakine ulaşılır

$$\phi^c = S$$

Kesişim ve birleşim arasındaki bir grup yararlı ilişki aşağıdaki gibidir.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 5.  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 'nin gösterimi- Aynı şekilden  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  kuralını da görebilirsiniz

### 2.2.5 Olayların Bölüntülenmesi

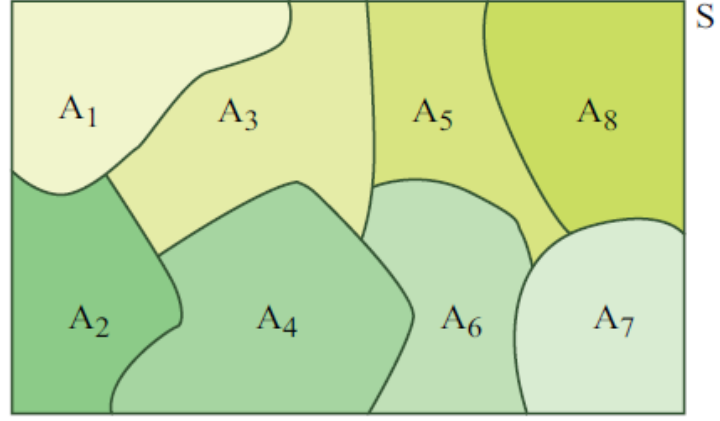
A ve B'nin ortak sonuçları yoksa *ayrık*tırlar (ya da *karşılıklı dışlayandır*). Yani

$$(A \cap B) = \phi$$

$A_1, A_2, \dots$  olaylar grubunun birleşimleri S'ye eşitse, *eksiksiz* olduğu söylenir.

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots = S$$

$A_1, A_2, \dots$  olay grubu, eğer aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa örneklem uzayının *bölüntüsü* olarak adlandırılır. Koşullar: (1)  $A_i, A_j$  ( $i \neq j$ ) herhangi iki farklı olay olsun.  $A_i$  ve  $A_j$  ayrışık  $(A_i \cap A_j) = \phi$  ve (2)  $A_1, A_2, \dots$  grubu eksiksiz ise. Aynı şekilde, *B olayının bölüntülerini*, birleşimi B'ye eşit olan karşılıklı dışlayan alt-olaylar olarak tanımlayabiliriz.



Kaynak: MIT OpenCourseWare

Şekil 6.  $S$ 'nin  $A_1, A_2, \dots, A_8$ 'ye bölüntülenmesi