Zaman Serileri Ekonometrisine Giriş

Durağanlık ve Durağan-Dışılık

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 2 – Konu 24

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

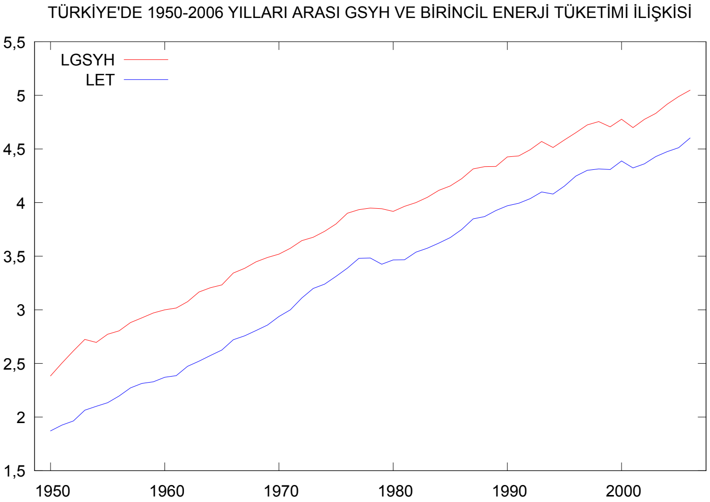
Zaman Serileri Ekonometrisi

- Önceki bölümlerde zaman serilerine dayanan bağlanım modellerinde verilerin "durağan" (stationary) olmasının önemli olduğunu söylemiştik.
- Eğer zaman serileri durağan değilse, SEK katsayı tahmin ve çıkarsama sonuçları kuşkulu duruma gelebilir.
- Bu bölümde; durağanlık kavramını anlatacak, durağanlığa ilişkin sınama yöntemlerinden söz edecek, ve durağan-dışı seriler arasında gözlenebilen ilişkileri inceleyeceğiz.
- Ayrıca, uygun dönüştürmeler ile durağanlaştırılan zaman serileri ile "yordama" (forecast) yapılması konusunu da ele alacağız. Bu bağlamda Box-Jenkins ve yöney özbağlanım modellerini tartışacağız.

Türkiye’de GSYH ve Enerji Tüketimi Verileri

- Konuya hızlı bir giriş yapmak amacıyla, 1950 - 2006 yılları arasında Türkiye’de milli gelir ve birincil enerji tüketimi yıllık zaman-serisi verilerini ele alalım.
- Zaman serileri çözümlemesinin ilk adımı verilerin görsel olarak incelenmesidir.
- Büyüme oranını daha iyi görmek için, genellikle serilerin doğal logaritmalarına bakmayı yeğleriz.
- 1987 fiyatlarıyla GSYH (milyon TL) doğal logaritmasını LGSYH ile gösterelim.
- Milyon ton eşdeğer petrol cinsinden birincil enerji tüketimi doğal logaritması da LET olsun.

Türkiye’de GSYH ve Enerji Tüketimi Verileri



Olasılıksal Süreçler

- Türkiye verilerinden edindiğimiz ilk izlenim, her iki serinin dalgalanmakla birlikte genel bir artış eğiliminde olduğudur.
- Bilmek istediğimiz asıl önemli konu ise serilerin örneklem dönemi sonrasında, diğer bir deyişle gelecekte nasıl bir yön izleyecekleridir.
- Bu soruyu yanıtlayabilmek ise bu serileri ortaya çıkaran "veri oluşturan süreç" (data generating process) ya da kısaca "VOS" (DGP) konusunu inceleyerek olur.
- Genel olarak, tüm zaman serilerinin ardında ekonomik ve politik ortamın yansıması olan bir rastsal ya da "olasılıksal" (stochastic) VOS yattığı varsayılır.
- Çizitte gördüğümüz türden veri setlerinin de böyle süreçlere ait gerçekleşme kümeleri oldukları düşünülür.
- Olasılıksal süreç ile ona ait gerçekleşmeler, yatay kesit verilerindeki anakütle ve örneklem kavramları gibidir.

Durağan Süreç

Zaman serileri çözümlemesindeki temel süreçlerden birisi "durağan" (stationary) olasılıksal süreçtir.

Durağan Süreç

Ortalaması ve varyansı zaman içerisinde değişmeyen ve iki dönem arasındaki kovaryansın ise bakılan döneme değil de dönemlerin arasındaki uzaklığa bağlı olduğu süreçtir.

- Açıklamak için aşağıdaki gibi bir Y_t serisi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu \\ \text{var}(Y_t) &= \gamma_0 \\ \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) &= \gamma_k \end{aligned}$$

- Şimdi, başlangıç noktasını t'den $t+k$'ye kaydırdığımızı düşünelim. Eğer Y durağan ise Y_t ve Y_{t+k} serilerinin ortalama, varyans ve kovaryansları aynı olmalıdır.
- Dikkat: $k = 0$ olduğunda $\text{cov}(Y_t, Y_{t+0}) = \text{var}(Y_t) = \sigma^2$'dir.

Durağan Süreç

- Tanımımıza göre durağan bir zaman serisi; ortalaması, varyansı ve kovaryansı zamandan bağımsız olan seridir.
- Böyle bir seri, kendi ortalaması çevresinde sabit genişlikte salınımlar gösterir. Bu özelliğe "ortalamaya dönüş" (mean reversion) de denir.
- Bu şekildeki durağan seriler yazında farklı adlandırmalarla karşımıza çıkabilmektedir:

"zayıf durağan" weakly stationary,
"kovaryans durağan" covariance stationary,
"ikinci-derece durağan" second-order stationary.

Beyaz Gürültü Süreci

- Ekonometrideki özel ve önemli bir durağan süreç türü, "saf rastsal" (pure random) ya da "beyaz gürültü" (white noise) adı verilen olasılıksal süreçtir.
- Bu sürecin özelliği ise sıfır ortalamalı, σ^2 sabit varyanslı ve özilintisiz olmasıdır.
- Böyle bir süreç eğer aynı zamanda bağımsız, özdeş ve normal dağılımlı ise buna da "Gaussçu beyaz gürültü" (Gaussian white noise) adı verilir.
- Klasik normal bağlanım modelindeki hata teriminin bu şekilde dağıldığını varsaydığımızı ve bunu da daha önce $u_i \sim \text{NBD}(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterdiğimizi anımsayalım.

Rastsal Yürüyüş Süreci

- Durağan serilerden farklı olarak; ortalaması, varyansı ya da bunların her ikisi birden zamana bağlı olarak değişen serilere "durağan-dışı" (non-stationary) seri denir.
- Durağan dışılığın klasik örneği ise "rastsal yürüyüş" (random walk) sürecidir.
- Rastsal yürüyüş, en basit şekliyle şöyle gösterilir:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

- Burada u_t beyaz gürültüdür.
- Rastsal yürüyüşün özilinti konusunda görmüş olduğumuz Markov birinci derece özbağlanımsal tasarımla yakın ilişkili olduğuna dikkat edelim:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t, \qquad -1 < \rho < 1$$

- Rastsal yürüyüşte $\rho = 1$ olduğu için, bu sürece "birim kök" (unit root) süreci de denilmektedir.

Rastsal Yürüyüş Süreci

- Rastsal yürüyüş sürecinde u_t sarsıntıları kalıcıdır:

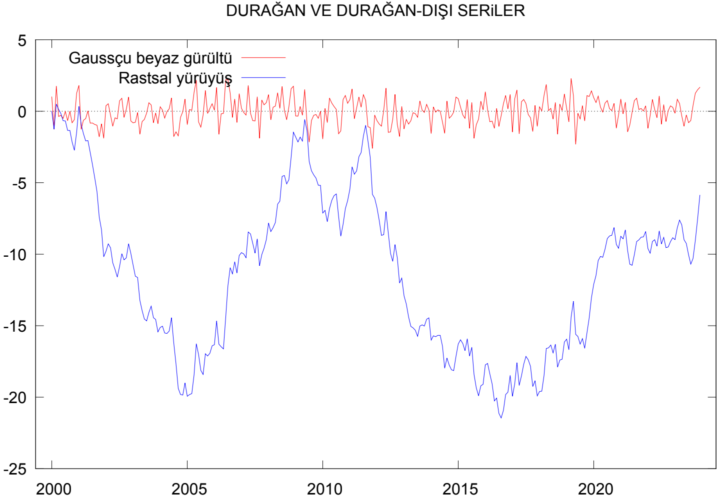
$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + u_1 \\ Y_2 &= Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2 \\ Y_3 &= Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3 \end{aligned}$$

- Kısaca, t dönemindeki değer şöyle yazılabilir:

$$Y_t = Y_0 + \sum u_t$$

- Herhangi bir dönemdeki değerin daha önceki tüm rastsal sarsıntıların toplamı olmasına, rastsal yürüyüşün "sonsuz bellek" (infinite memory) özelliği de denir.
- $E(u_t) = 0$ olduğundan, $E(Y_t) = Y_0$ olduğuna dikkat edelim. Diğer bir deyişle Y_t'nin ortalaması sabittir.
- Öte yandan, rastsal hatalar toplandığı için, $\text{var}(Y_t)$ sürekli artmakta ve böylece durağanlık varsayımı çiğnenmektedir.
- Y_t'nin varyansının $\text{var}(Y_t) = t\sigma^2$ olduğu gösterilebilir. Buna göre, t sonsuza giderken varyans da sonsuza gitmektedir.

Durağan ve Durağan-Dışı Seriler



Durağanlığı Sınamak

- Zaman serileri çözümlemesinde serilerin durağan olması önemlidir, çünkü bir seri eğer durağan değilse farklı veri setlerinde farklı görüntüler sergiler.
- Bu durumda serinin davranışı diğer dönemlere genellenemez ve geleceği tahmin etmek için yararlı olmaz.
- Durağanlık aranan bir özellik olduğuna göre, elimizdeki bir zaman serisinin durağan olup olmadığını bilmek isteriz.
- Uygulamada bir serinin durağan olup olmadığını anlamak çeşitli biçimsel ve biçimsel-dışı yöntemlere konu olur.

Özilinti İşlevi

- Durağanlığı anlamaya yönelik biçimsel-dışı bir yaklaşım çizim yöntemidir.
- Örnek olarak, Türkiye verilerine baktığımızda milli gelir ve enerji tüketimi varyanslarının 1978 öncesi ve sonrasında farklılık gösterdiği izlenimine kapılırız.
- Ancak bu şekilde kesin bir sonuca varmak zor olabilir.
- Bu noktada işimize yarayabilecek bir sınama yöntemi ise "özilinti işlevi" (autocorrelation function) ya da kısaca "Öİİ" (ACF) denilen ölçüte başvurmaktır.
- k gecikme için ρ_k ile gösterilen özilinti işlevi formülü şudur:

$$\rho_k = \frac{\text{gecikme } k \text{ iken kovaryans}}{\text{gecikme 0 iken kovaryans}} = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}$$

- ρ_k birimden bağımsızdır ve tüm ilinti katsayıları gibi $[-1{,}1]$ aralığında yer alır.

Özilinti İşlevi

- Yukarıda verdiğimiz ρ_k tanımı olasılıksal sürece, diğer bir deyişle anakütleye aittir.
- Uygulamada ise yalnızca gerçekleşmeleri görebildiğimiz için örnekleme ait $\hat{\gamma}_k$ ve $\hat{\sigma}^2$ değerlerini kullanırız:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n-k} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})^2}{n-1}$$

- Bu durumda örneklem özilinti işlevi $\hat{\rho}_k$ da şöyle olur:

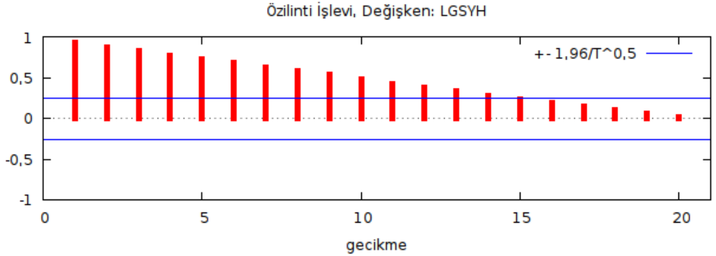
$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\sigma}^2}$$

- Öyleyse $\hat{\rho}_k$, gecikme sayısı k iken örneklem kovaryansının örneklemin varyansına oranından başka birşey değildir.

UADMK ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Özilinti İşlevi

- $\hat{\rho}_k$'nın k'ye göre çizimine "ilintiçizit" (correlogram) denir.
- Bir serinin durağan olup olmadığını anlamanın bir yolu işte bu örneklem ilintiçizitini incelemektir.
- Örnek olarak, reel GSYH serimize ait ilintiçizit şöyledir:



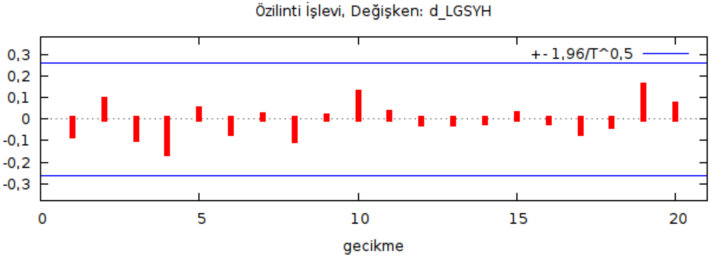
- Yukarıdaki ilintiçizite bakınca, gecikme sayısı k artarken $\hat{\rho}_k$'nın düzenli olarak azaldığını ancak 10 gecikme sonra bile yüksek değerler almayı sürdürdüğünü görüyoruz.
- Bu örüntü, serinin durağan olmadığının bir göstergesidir.

Özilinti İşlevinin İstatistiksel Anlamlılığı

- Bir $\hat{\rho}_k$'nın istatistiksel olarak sıfırdan farklı olup olmadığını anlamak için ölçünlü hatasından yararlanılır.
- İngiliz istatistikçi M. S. Bartlett, bir zaman serisi bütünüyle rastsal ise $\hat{\rho}_k$'nın da 0 ortalama ve $1/n$ varyans ile yaklaşık normal dağıldığını göstermiştir.
- Bu bilgiden ve ölçünlü normal dağılımın özelliklerinden yararlanarak herhangi bir $\hat{\rho}_k$'nın güven aralığı bulunabilir.
- Örnek olarak, LGSYH serimizde 57 gözlem olduğuna göre, örneklem varyansını $1/57 = 0{,}0175$ ve örneklem ölçünlü hatasını da $1/\sqrt{57} = 0{,}1325$ olarak hesaplarız.
- Bu durumda tahmin edilen $\hat{\rho}_k$'ların %95 güven aralığını da $\pm 1{,}96(0{,}1325) = 0{,}2597$ olarak buluruz. Demek ki $\hat{\rho}_k$ $(-0{,}2597, 0{,}2597)$ aralığında ise 0 olduğu reddedilmez.
- Gretl, bu güven aralığını iki lacivert çizgi ile göstermiştir.

Durağan Bir Serinin Özilinti İşlevi

- Durağan-dışı serilerdeki sıfırdan anlamlı derecede büyük ve düzenli azalan özilintiler, durağan serilerde görülmez.
- Durağan bir seride tüm ilintilerin sıfıra yakın çıkması beklenir.
- Örnek olarak, durağan bir serinin ilintiçiziti şöyledir:



- Tüm $\hat{\rho}_k$'ların iki lacivert çizgi arasında yer aldığına ve dolayısıyla 0 olduklarının reddedilmediğine dikkat ediniz.

Birim Kök Sınaması

- Durağan-dışılığı sınamanın uygulamadaki en yaygın yolu, biçimsel birim kök sınamasına başvurmaktır.
- Birinci derece özbağlanımsal modeli anımsayalım:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$$

- Eğer $\rho = 1$ ise serinin durağan-dışı olduğunu ve bu sürece de birim kök süreci dendiğini biliyoruz.
- Birim kök sınamasındaki genel düşünce ρ'nun istatistiksel olarak 1'e eşit olup olmadığını sınamaktır.
- Bu doğrultuda, elde edilecek sonuçlarının daha güvenilir olabilmesi için yukarıdaki model genellikle şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t \\ \Delta Y_t &= (1-\rho) Y_{t-1} + u_t \\ &= \delta Y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

- Bu modelde $H_0 : \delta = 0$ sıfır önsavının sınanmasına "Dickey-Fuller" ya da kısaca "DF" birim kök sınaması denir.

Birim Kök Sınaması

- DF sınamasını uygulamak, olası birim kök sürecinin doğasına ilişkin bazı seçimler yapmayı gerekli kılar.
- Dolayısıyla, sınama için şu dört ayrı belirtim kullanılabilir:

Sabit terim olmadan: $\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ile: $\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ve eğilim: $\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ve üstel eğilim: $\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \delta Y_{t-1} + u_t$

- Yukarıdaki belirtimlerden hangisinin kullanılacağına görsel inceleme sonunda karar verilir.
- Örnek olarak, seride doğrusal bir artış eğilimi gözleniyorsa sabit terim ve eğilim seçeneği kullanılır.

Genişletmeli Dickey-Fuller Sınaması

- DF sınamasında u_t'nin özilintisiz olduğu varsayılmaktadır.
- Bu çoğunlukla geçerli olmadığı için, yukarıda gösterdiğimiz model belirtimlerinin sonlarına ΔY_t'nin gecikmeli değerleri eklenerek sınama genişletilmiştir.
- Bu yeni sınamaya "Genişletmeli Dickey-Fuller" (Augmented Dickey-Fuller) ya da kısaca "ADF" sınaması denir.
- Örnek olarak, sabit terimsiz ADF sınama belirtimi şöyledir:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta Y_{t-i} + u_t$$

- Buradaki gecikme derecesi m genellikle Akaike gibi bilgi ölçütlerine dayanılarak, görgül olarak belirlenmektedir.

ADF Sınamasının Adımları

DF ve ADF sınamalarında Y_{t-1}'nin önündeki δ değiştirgesi ne yazık ki büyük örneklemlerde bile t dağılımını izlememektedir.

Dickey ve Fuller, δ'nın örneklem dağılımına τ (tau) adını vermiş ve buna ait kritik değerleri Monte Carlo yöntemi ile bulmuşlardır.

Dolayısıyla, ADF sınamasının adımları şöyledir:

1. Sınanacak zaman serisi incelenir ve var olduğu düşünülen olasılıksal sürece uygun sınama belirtimi seçilir.
2. Model tahmin edilir ve aşağıdaki τ istatistiği hesaplanır.

$$\tau = \frac{\hat{\delta}}{\text{öh}(\hat{\delta})}$$

3. Sıfır önsavı $H_0 : \delta = 0$ ve almaşık önsav ise $H_1 : \delta < 0$ şeklindedir. Diğer deyişle ADF tek kuyruklu bir sınamadır.
4. Hesaplanan sınama istatistiği çizelgeden bulunan kritik τ değerinden büyükse, birim kök sıfır önsavı reddedilir.

ADF Sınaması Açıklayıcı Örnek

- ADF sınamasına bir açıklayıcı örnek olarak, Türkiye'de milli gelir ve birincil enerji tüketimi verilerimize dönelim.
- LGSYH ve LET'in doğrusal bir artış eğiliminde olduklarını dikkate alarak, sınamamızı sabit terim ve eğilim kullanarak yapmalıyız.
- Gecikme derecesi için ise $m = 1$ kullanalım.
- Birim kök olduğu sıfır önsavı altında, LGSYH ve LET için ADF sınama istatistikleri sırasıyla $\tau_{\text{LGSYH}} = -2{,}7858$ ve $\tau_{\text{LET}} = -1{,}6116$ olarak bulunur.
- Bu değerlere karşılık gelen kavuşmazsal p-değerleri ise 0,2025 ve 0,7888'dir.
- Buna göre milli gelir ve enerji tüketiminin logaritmalarının durağan-dışı olduğunu reddetmiyoruz.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Düzmece Bağlanım ve Eştümleşim