# Eşanlı Denklem Modelleri

## Eşanlı Denklem Yanlılığı

Ekonometri 2 – Konu 21

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

# UADMK Açık Lisans Bilgisi



A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 CC BY-NC-SA

# Ders Planı

# Eşanlı Denklem Yanlılığı

- Eşanlı denklem modellerinin temel özelliği, bir denklemde bağımlı olan değişkenin diğer bir denklemde açıklayıcı değişken olabilmesidir.
- Böyle içtürel açıklayıcı değişkenlerin en büyük sakıncası ise bağlanım hata terimi ile genellikle ilişkili çıkmalarıdır.
- $X$'lerin olasılıksal olmadığı varsayımının çiğnenmesi anlamına gelen bu durumda SEK tahmincileri tutarsızdır.
- Diğer bir deyişle, SEK tahmincileri yanlıdır ve bu yanlılık örneklem büyüklüğü artsa bile ortadan kalkmaz.

# Keynesçi Gelir Modeli Örneği

- Eşanlı denklem yanlılığını cebirsel olarak göstermek için aşağıdaki basit Keynesçi gelir modelini ele alalım.

$$\begin{array}{ll} \text{Tüketim işlevi:} & C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t \\ \text{Gelir tanımı:} & Y_t = C_t + S_t \end{array}$$

- Burada
  - $C_t$ tüketim harcamasını,
  - $Y_t$ geliri,
  - $S_t$ de tasarrufu göstermektedir.
- $\beta_1 > 0$ ve $0 < \beta_2 < 1$ ise otonom tüketimi ve marjinal tüketim eğilimini anlatan anakütle değiştirgeleridir.
- $C_t$ ve $Y_t$'nin karşılıklı bağımlı oldukları görülmektedir.

# Hata Teriminin $Y$ ile İlintili Olması

- İlk olarak elimizdeki modelde $Y_t$'nin hata terimi ile ilintili olduğunu gösterelim.
- Tüketim işlevini gelir özdeşliğinde yerine koyarsak şunu buluruz:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t + I_t \\ Y_t &= \frac{\beta_1}{1-\beta_2} + \frac{1}{1-\beta_2} I_t + \frac{1}{1-\beta_2} u_t \end{aligned}$$

- $E(u_t) = 0$ varsayımından ve $I_t$'nin önceden belirli olduğu için beklenen değerinin kendisine eşit olma özelliğinden yararlanarak şunu elde ederiz:

$$E(Y_t) = \frac{\beta_1}{1-\beta_2} + \frac{1}{1-\beta_2} I_t$$

*(...devam)*

# Hata Teriminin $Y$ ile İlintili Olması

- Yukarıdaki üçüncü denklemi ikinciden çıkartalım.

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1 - \beta_2}$$

- $E(u_t) = 0$ olduğuna göre $u_t - E(u_t) = u_t$ diyebiliriz.
- Buna göre $Y_t$ ve $u_t$ arasındaki kovaryans şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, u_t) &= E\left([Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]\right) \\ &= \frac{E(u_t^2)}{1 - \beta_2} \\ &= \frac{\sigma^2}{1 - \beta_2} \end{aligned}$$

- $0 < \beta_2 < 1$ ve $\sigma^2 > 0$ olduğu için $\text{cov}(Y_t, u_t)$ sıfırdan farklı olmalıdır. Bu durumda hata teriminin bağımlı değişken ile ilintisiz olduğu yönündeki SEK varsayımı çiğnenmiş olur.

# Değiştirge Tahminlerinin Yanlı Olması

- İkinci olarak $Y_t$ ve $u_t$ arasındaki ilinti nedeniyle değiştirge tahminlerinin yanlı olduğunu göstermek istiyoruz.
- Bunun için $\hat{\beta}_2$ formülünü anımsayalım:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum c_t y_t}{\sum y_t^2} \\ &= \frac{\sum C_t y_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

- Alışık olduğumuz gibi, küçük harfler burada ortalamadan sapmaları göstermektedir.
- Formül ikili bağlanım konusunda gördüğümüz ile aynıdır. Tahmin edilen şey tüketim işlevi olduğu için $C_t$'nin bağımlı, $Y_t$'nin ise açıklayıcı değişken olduğuna dikkat ediniz.

*(. . . devam)*

# Değiştirge Tahminlerinin Yanlı Olması

- Şimdi, $\hat{\beta}_2$ formülündeki $C_t$ yerine bunun tüketim işlevindeki eşitini koyalım:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{\sum(\beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t)y_t}{\sum y_t^2} \\ &= \beta_2 + \frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\end{aligned}$$

- Dikkat: Yukarıdaki ikinci adımda $\sum Y_t y_t / \sum y_t^2 = 1$ ve $\sum y_t = 0$ özelliklerinden yararlanılmıştır.
- Her iki yanının beklenen değerini alırsak şunu buluruz:

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left[\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right]$$

- Beklenen değer işlemcisi doğrusal olduğu için en sağdaki terimi değerlendiremiyoruz. Ancak açıkça görülüyor ki $\sum y_t u_t$ terimi sıfır olmadıkça $\hat{\beta}_2$ yanlı bir tahmin edicidir.

# Değiştirge Tahminlerinin Tutarsız Olması

- Eşanlılık altında tahminlerin tutarsız olduğunu göstermek için, bulmuş olduğumuz $E(\beta_2)$ formülünden yola çıkıyoruz:

$$E(\hat{\beta}_2) = \beta_2 + E\left[\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right]$$

- Yukarıda görülen $\sum y_t u_t$ bir örneklem kavramıdır. Bu terim bir anakütle kavramı olan $\text{cov}(Y_t, u_t)$ ile yakından ilişkilidir ancak ona eşit değildir.
- Bu nedenle $Y_t$ ile $u_t$'nin ilintili olduğunu, diğer bir deyişle $\text{cov}(Y_t, u_t) \neq 0$ eşitsizliğini göstermiş olsak da $\sum y_t u_t \neq 0$ diyemiyoruz.
- Bir tahmincinin beklenen değeri kesin olarak bilinemediği zaman dikkatler bunun kavuşmazsal değerine yöneltilir.
- Bunun için ise "olasılık sınırı" (probability limit), kısaca "plim" kavramından yararlanılır.

*(…devam)*

# Değiştirge Tahminlerinin Tutarsız Olması

- $E(\hat{\beta}_2)$ formülünün her iki yanının olasılık sınırını alalım.

$$\text{plim}(\hat{\beta}_2) = \text{plim}(\beta_2) + \text{plim}\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right)$$

- Örneklem büyüklüğü sonsuza giderken $\sum y_t^2/n = \text{var}(y_t)$ olur. Benzer şekilde $\sum y_t u_t/n = \text{cov}(y_t, u_t)$ olur.
- $\text{var}(y_t) = \sigma_Y^2$ ve daha önce bulduğumuz $\text{cov}(y_t, u_t) = \frac{\sigma^2}{1-\beta_2}$ eşitliklerini kullanarak şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \text{plim}(\hat{\beta}_2) &= \text{plim}(\beta_2) + \frac{\text{plim}(\sum y_t u_t/n)}{\text{plim}(\sum y_t^2/n)} \\ &= \beta_2 + \frac{\sigma^2/(1-\beta_2)}{\sigma_Y^2} \end{aligned}$$

- $0 < \beta_2 < 1$ ve $\sigma^2, \sigma_Y^2 > 0$ olduğuna göre, $\hat{\beta}_2$ gerçek $\beta_2$'yi olduğundan büyük tahmin etmektedir. Demek ki $\hat{\beta}_2$ yanlıdır ve örneklem büyüse de yanlılık ortadan kalkmamaktadır.

# Önümüzdeki Dersin Konusu

**Önümüzdeki ders**

Tek denklemli modellerde eşanlılık