Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

Dizey Yaklaşımı ile Tahmin Sorunu

TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 2 – Konu 3

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

Ders Planı

1. Dizey Yaklaşımı ile Tahmin Sorunu
   - SEK Tahmincilerinin Bulunması
   - Varyans-Kovaryans Dizeyi

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- **B** yöneyini tahmin etmek için sıradan enküçük kareler (SEK) ya da ençok olabilirlik (EO) gibi farklı yaklaşımlar kullanılabildiğini biliyoruz.
- Biz dikkatimizi SEK yöntemi üzerinde toplayacağız.
- Bağlanımın SEK tahminini bulmak için önce *k* değişken içeren örneklem bağlanım işlevini yazalım:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i$$

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- ÖBİ'yi dizey gösterimiyle açık olarak şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} + \hat{\mathbf{u}}_{n\times 1}$$

- Bilindiği gibi SEK tahmincileri hata kareleri toplamının enazlanması yolu ile bulunmaktadır.
- Öyleyse yukarıdaki eşitliği şu şekilde de yazabiliriz:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$$

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- Hata kareleri toplamının aşağıdaki gösterim biçimine dikkat edelim:

$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \hat{u}_1{}^2 + \hat{u}_2{}^2 + \dots + \hat{u}_n{}^2 = \sum \hat{u}_i{}^2$$

- Buna göre $\mathbf{u}'\mathbf{u}$'nun dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

- Dikkat: Burada $\mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ bir sayıl olduğu için, kendi devriği olan $\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$'ye eşittir.

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ eşitliğini enazlamak için, bu eşitliğin $\hat{\mathbf{B}}$'ya göre kısmi türevini alır ve sıfıra eşitleriz.
- Bu işlem bize "normal denklemler" (normal equations) denilen k bilinmeyenli k eşanlı denklemi verir:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\hat{\beta}_1 n + & \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} & + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{ki} & = & \sum Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + & \hat{\beta}_3 \sum X_{2i}X_{3i} & + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{2i}X_{ki} & = & \sum X_{2i} Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{3i}X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2 & + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{3i}X_{ki} & = & \sum X_{3i} Y_i \\
\vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{ki}X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{ki}X_{3i} & + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 & = & \sum X_{ki} Y_i
\end{array}
$$

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- Yukarıdaki denklem takımının dizey gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ X_{31} & X_{32} & \dots & X_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{k\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} = \mathbf{X}'_{k\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$ diye yazılır.

SEK Tahmincilerinin Bulunması

Normal denklemlerin dizey gösteriminde yer alan aşağıdaki ($\mathbf{X}'\mathbf{X}$) dizeyi önemlidir.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

Bu dizeyin şu üç özelliğine dikkat edelim:

1. ($\mathbf{X}'\mathbf{X}$) dizeyi $k \times k$ boyutundadır ve olasılıksal değildir.
2. Asal köşegen öğeleri ham kare toplamlarını, köşegen dışı öğeler ise ham çapraz çarpım toplamlarını gösterir.
3. $X_{2i}X_{3i}$ çapraz çarpımı $X_{3i}X_{2i}$ çapraz çarpımına eşit olduğu için dizey bakışımlıdır.

SEK Tahmincilerinin Bulunması

- Sonuç olarak, *k* değişkenli modelin SEK tahmincilerini elde etmek için normal denklemlerin dizey gösterimini yazalım:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Eğer ($\mathbf{X}'\mathbf{X}$) dizeyinin tersi varsa, yukarıdaki denklemin her iki yanını bu ters dizeyle önden çarparak şunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ \mathbf{I}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\end{aligned}$$

- Buna göre SEK kuramının temel denkleminin dizey gösterimi şudur:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Yukarıdaki eşitlik, eldeki verilerden $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin nasıl tahmin edileceğini gösterir.

Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Herhangi bir $\hat{\beta}_i$ varyansı yanında tüm $\hat{\beta}_i$ ve $\hat{\beta}_j$'lar arasındaki kovaryansları dizey yöntemi ile kolayca gösterebiliriz.
- Bu varyans ve kovaryanslar çeşitli istatistiksel çıkarsama işlemleri için önemlidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$'nın "varyans-kovaryans dizeyi" (variance-covariance matrix) şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = E\left([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]'\right)$$

- Buna göre varcov($\hat{\mathbf{B}}$) aslında şu dizeydir:

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \text{var}(\hat{\beta}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \text{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \dots & \text{var}(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

varcov(**B**) Dizeyinin Türetilmesi

- varcov($\hat{\mathbf{B}}$)'yı türetmede $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$ eşitliğinden yararlanılır.

Üsttekini $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ temel denkleminde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{XB} + \mathbf{u})\\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{XB} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\\ &= \mathbf{B} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

Demek ki $\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$. varcov($\hat{\mathbf{B}}$) varyans-kovaryans dizeyi ise tanım gereği şöyledir:

$$\begin{aligned}\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= E([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]')\\ &= E\left([(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'\right)\\ &= E\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{uu}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)\end{aligned}$$

- X'lerin olasılıksal olmadığına dikkat edilerek şu bulunabilir:

$$\begin{aligned}\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\mathbf{uu}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned}$$

- Dikkat: Yukarıda $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$ varsayımı kullanılmıştır.

Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Türetilmesinden de anlaşılacağı gibi varyans-kovaryans dizeyi aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

Varyans-kovaryans Dizeyi

$$\text{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ burada $\hat{\mathbf{B}}$ SEK tahmincilerini veren eşitlikte yer alan ters dizeydir.
- σ^2 ise u_i'nin sabit varyansıdır. Uygulamada σ^2 yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.
- k değişkenli durumda $\hat{\sigma}^2$ aşağıdaki eşitlikten bulunabilir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^{\,2}}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k}$$

Varyans-kovaryans dizeyi

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$, ilke olarak tahmin edilen kalıntılardan bulunabilse de uygulamada şu yolla doğrudan hesaplanabilir:

$$\sum \hat{u}_i^2 = \text{KKT} = \text{TKT} - \text{BKT}$$

- Toplam kareleri toplamı aşağıdaki şekilde gösterilir:

Toplam kareleri toplamı

$$\sum \hat{y}_i^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

- $n\bar{Y}^2$ terimi burada ortalamadan sapma kareleri toplamının bulunması için gereken düzeltme terimidir.
- Bağlanım kareleri toplamının dizey gösterimi ise şöyledir:

Bağlanım kareleri toplamı

$$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum y_i x_{ki} = \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Kalıntı kareleri toplamı KKT ise TKT ve BKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

Kalıntı kareleri toplamı

$$\begin{aligned} \text{KKT} &= \text{TKT} - \text{BKT} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) - (\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ bulunduktan sonra $\hat{\sigma}^2$'yi kolayca hesaplayabiliriz.
- $\hat{\sigma}^2$'yi hesapladıktan sonra ise varyans-kovaryans dizeyini tahmin edebiliriz.

SEK Tahmincilerinin Özellikleri

- SEK tahmincilerinin en iyi doğrusal yansız tahminci ya da kısaca "EDYT" (BLUE) olduklarını biliyoruz.
- Bu özellik elbette dizey yaklaşımıyla bulunan $\hat{\mathbf{B}}$ için de geçerlidir.
- Buna göre $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin her bir öğesi bağımlı değişken Y'nin doğrusal işlevidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$ yansızdır. Diğer bir deyişle tüm öğelerinin beklenen değeri öğenin kendisine eşittir: $E(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}$.
- SEK tahmincisi $\hat{\mathbf{B}}$, tüm $\mathbf{B}$ tahmincileri içinde en iyi, enaz varyanslı tahmincidir.

Belirleme Katsayısının Dizey Gösterimi

- Belirleme katsayısı R^2'yi daha önce şöyle tanımlamıştık:

$$R^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}}$$

- Buna göre belirleme katsayısının dizey gösterimi de şöyledir:

$$R^2 = \frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}$$

İlinti Dizeyi

- Dizey yaklaşımında, k değişkenli durum için, değişkenler arasındaki sıfırıncı dereceden ilinti katsayılarını veren "ilinti dizeyi" (correlation matrix) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & r_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Burada 1 alt imi bağımlı değişken Y'yi gösterir. Örnek olarak, Y ile X_2 arasındaki ilinti katsayısı r_{12}'dir.
- Asal köşegen üzerindeki 1'ler ise bir değişkenin kendisiyle olan ilinti katsayısının her zaman 1 olmasındandır.
- İlinti dizeyi **R** kullanılarak birinci dereceden ve daha yüksek dereceden ilinti katsayılarını da elde etmek olasıdır.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Dizey yaklaşımı ile çıkarsama sorunu