Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

Doğrusal Modelin Dizey Gösterimi

Ekonometri 2 – Konu 2

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

Ders Planı

Dizey Yaklaşımının Önemi

- Y bağımlı değişkeni ile $(k-1)$ sayıda açıklayıcı değişken $(X_2, X_3, \dots, X_k)$ içeren k değişkenli doğrusal bağlanım modelini ele almak için en doğru yaklaşım dizey cebiridir.
- Dizey cebirinin "sayıl" (scalar) cebirine üstünlüğü, herhangi bir sayıda değişken içeren bağlanım modellerini ele alıştaki yalın ve öz yaklaşımıdır.
- k değişkenli model bir kez kurulduktan ve dizey cebiri ile çözüldükten sonra bu çözüm çok sayıda değişkene kolaylıkla uygulanabilir.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- k değişkenli anakütle bağlanım işlevini anımsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- Burada i örneklem büyüklüğü olduğuna göre, elimizdeki ABİ şu n sayıdaki eşanlı denklemin kısa yazılışıdır:

$$\begin{array}{ccccc} Y_1 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} & + & u_1 \\ Y_2 & = & \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} & + & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \ddots \; \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & = & \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} & + & u_n \end{array}$$

- Yukarıdaki denklem setini şöyle de gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \ldots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \ldots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca $\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times 1} + \mathbf{u}_{n\times 1}$.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- **X**, **Y**, **B** ve **u**'nun boyutlarının karışıklığa yol açmayacağı durumda, doğrusal bağlanım modelinin dizey gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$$

- Burada

  Y bağımlı değişken gözlemlerinin $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,

  X X_2'den X_k'ye kadar olan $k-1$ değişkenin n sayıdaki gözleminin $n \times k$ boyutlu dizeyini,

  B $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ anakütle katsayılarının $k \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,

  u ise u_i "bozukluk" (disturbance) teriminin $n \times 1$ boyutundaki sütun yöneyini

  göstermektedir.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- Örnek olarak daha önce incelemiş olduğumuz iki değişkenli tüketim-gelir modelinin dizey yaklaşımı ile gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca şöyle yazılabilir:

$$\mathbf{Y}_{10\times 1} = \mathbf{X}_{10\times 2}\mathbf{B}_{2\times 1} + \mathbf{u}_{10\times 1}$$

1. Varsayım

Dizey cebiri yaklaşımı, önceden görmüş olduğumuz klasik doğrusal bağlanım modeli (KDBM) varsayımlarını incelemede büyük kolaylık sağlamaktadır.
Şimdi bu beş varsayımı dizey yaklaşımı ile ele alalım:

1. Varsayım

u bozukluk yöneyinin tüm öğeleri için beklenen değer sıfırdır.
Kısaca hata teriminin beklenen değeri sıfırdır: $E(\mathbf{u}) = 0$.

- Daha açık olarak $E(\mathbf{u}) = 0$ şu demektir:

$$E\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Varsayım

2. Varsayım

u_i hataları, sıfır ortalama ve sabit bir varyans ile normal dağılırlar: $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$.

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise aynı boyutlu bir boş yöneydir.
- Bu varsayım, bağlanımın tahmin edilmesinden sonra çeşitli önsav sınamalarının yapılabilmesi için gereklidir.

3. Varsayım

3. Varsayım

Hatalar arasında özilinti yoktur: $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$.

- Bu varsayımın daha önce sayısal olarak ele alınan üç varsayımın kısa ve öz anlatımı olduğu şöyle gösterilebilir:

$$E(\mathbf{uu}') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

(...devam)

3. Varsayım

- Dizeyin her bir öğesinin beklenen değerini alalım:

$$E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \dots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & \dots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & \dots & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

- Hata terimi ortalaması sıfır varsayılıdır: $E(u_i) = \mu = 0$
- Varyans ve kovaryansın formüllerini anımsayalım:

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu^2, \qquad \mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

- Bu durumda, u_i hatalarının "varyans-kovaryans dizeyi" (variance-covariance matrix) üçüncü varsayıma göre şöyle olmalıdır:

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}$$

4. Varsayım

4. Varsayım

$n \times n$ boyutlu $\mathbf{X}$ dizeyi olasılıksal değildir.

- Diğer bir deyişle $X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}$ değişmeyen sayılardan oluşmaktadır.
- Başta belirtildiği gibi, elimizdeki bağlanım çözümlemesi X değişkenlerinin verili değerlerine bağlı bir koşullu bağlanım çözümlemesidir.

5. Varsayım

5. Varsayım

$\mathbf{X}$'in derecesi k'dir: $\rho(\mathbf{X}) = k$. k burada $\mathbf{X}$'in sütun sayısı olup, gözlem sayısı n'den küçüktür.

- Diğer bir deyişle, X değişkenleri arasında tam bir doğrusal ilişki ya da "çoklueşdoğrusallık" (multicollinearity) yoktur.
- Eğer bu varsayım gerçekleşmez ise, bağlanıma ait $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ dizeyinin belirleyeni sıfır olur ve çözümlemede gerekli olan tersi bulunamaz.

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Dizey yaklaşımı ile tahmin sorunu