Doğrusal Bağlanıma Dizey Yaklaşımı

Dizey cebirinin gözden geçirilmesi

Ekonometri 2 – Konu 1

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

Ders Planı

1. Dizeylere İlişkin Temel Kavramlar
   - Tanımlar
   - Dizey Türleri
2. Dizey İşlemleri
   - Temel İşlemler
   - Belirleyen ve Dizey Tersi Alınması

Dizey

- Dizey cebiri kullanmaksızın k değişkenli bir bağlanım modeliyle uğraşmak son derece karmaşık bir iştir.
- Burada, doğrusal bağlanım modelini dizey yaklaşımı ile ele alabilmek için gerekli temel altyapı sunulacaktır.

Dizey

$M \times N$ boyutlu bir "dizey" (matrix), M satır ve N sütun biçiminde düzenlenmiş sayılar ya da öğelerin dikdörtgen bir dizgesidir.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- a_{ij} burada **A** dizeyinin i'inci satırı ve j'inci sütununda görülen öğeyi anlatmaktadır.

Sayıl

- 2×3 boyutundaki bir dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sayıl

"Sayıl" (scalar), tek bir gerçek sayıdır ve 1×1 boyutunda bir dizey kabul edilir.

- Sayıla örnek:

$$\mathbf{B}_{1\times 1} = [5]$$

Satır ve Sütun Yöneyleri

Sütun Yöneyi

Tek bir sütunu ve M sayıda satırı olan dizeye "sütun yöneyi" (column vector) denir.

Satır Yöneyi

Tek bir satırı ve N sayıda sütunu olan dizeye "satır yöneyi" (row vector) denir.

- Sütun yöneyine örnek:

$$\mathbf{A}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

- Satır yöneyine örnek:

$$\mathbf{B}_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Altdizey

Altdizey

$M \times N$ boyutundaki bir $\mathbf{A}$ dizeyinin r sayıda satırı ile s sayıda sütununun dışındaki tüm öğeleri silinirse elde edilen $r \times s$ boyutlu dizey, $\mathbf{A}$'ya ait bir "altdizey" (submatrix) olur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen $\mathbf{A}$ dizeyinin üçüncü satırıyla ikinci sütununu silersek $\mathbf{A}$'nın 2×2 boyutundaki bir $\mathbf{B}$ altdizeyini bulmuş oluruz:

$$\mathbf{A}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Kare Dizey ve Köşegen Dizey

Kare Dizey

Satır sayısı sütun sayısı ile aynı olan dizeye "kare dizey" (square matrix) denir.

Köşegen Dizey

Asal (sol üst köşeden sağ alt köşeye uzanan) köşegeninde en az bir sıfırdan farklı öğe bulunan ve bu köşegen dışı tüm öğeleri sıfır olan dizeye "köşegen dizey" (diagonal matrix) denir.

- Kare dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Köşegen dizeye örnek:

$$\mathbf{B}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sayıl Dizey ve Birim Dizey

Sayıl Dizey

Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi aynı olan köşegen dizeye "sayıl dizey" (scalar matrix) denir.

Birim Dizey

Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi 1 olan köşegen dizeye "birim dizey" (identity matrix) denir ve **I** ile gösterilir.

- Sayıl dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

- Birim dizeye örnek:

$$\mathbf{I}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bakışımlı Dizey ve Eşit Dizeyler

Bakışımlı Dizey

Asal köşegeni üzerindeki öğeleri, asal köşegeni altındaki öğelerinin bakışımı olan dizeye "bakışımlı dizey" (symmetric matrix) denir. Devriği kendisine eşittir.

Eşit Dizeyler

A ve **B** gibi iki dizeyin boyutları aynıysa ve karşılıklı öğeleri birbirine eşitse ($a_{ij} = b_{ij}$), bu dizeyler eşittir.

- Bakışımlı dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

- Eşit dizeylere örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Boş Dizey ve Boş Yöney

Boş Dizey

Bütün öğeleri sıfır olan dizeye "boş dizey" (null matrix) denir ve **0** ile gösterilir.

Boş Yöney

Bütün öğeleri sıfır olan satır ya da sütun yöneyine "boş yöney" (null vector) denir ve **0** ile gösterilir.

- Boş dizeye örnek:

$$\mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Boş yöneye örnek:

$$\mathbf{0}_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dizey Toplamı ve Farkı

Dizey Toplaması ve Çıkarması

A ve **B** dizeylerinin toplamı ya da farkı, karşılıklı öğelerinin toplamı ya da farkı alınarak elde edilir. Bu dizeylerin toplama ya da çıkarma için uyumlu olabilmeleri için boyutları aynı olmalıdır.

- Dizey toplamasına örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 2} + \mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Dizey Çarpımı

Bir Dizeyin Bir Sayıl ile Çarpımı ya da Bölümü

Bir **A** dizeyini $\lambda \in$ R sayılı ile çarpmak ya da bölmek için, dizeyin bütün öğeleri λ ile çarpılır ya da $\lambda \neq 0$'a bölünür.

Dizeyler Çarpımı

Boyutu $M \times N$ olan **A** ve boyutu $N \times P$ olan **B** dizeylerinin **AB** çarpımı, $M \times P$ boyutunda ve aşağıdaki gibi bir **C** dizeyi olur.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} \qquad i = \{1, 2, \ldots, M\} \qquad j = \{1, 2, \ldots, P\}$$

- Diğer bir deyişle **C**'nin *i*'inci satır ve *j*'inci sütun öğesi, **A**'nın *i*'inci satırındaki öğelerinin **B**'nin *j*'inci sütunundaki karşılıklı öğeleri ile çarpılıp, çarpımların toplanması ile bulunur.

Dizeyler Çarpımının Özellikleri

Dizeyler çarpımı işlemi aşağıdaki özellikleri taşır:

1. Dizey çarpımı değişmeli olmak zorunda değildir. Kısaca dizeylerin çarpım sıralaması önemlidir: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
2. **AB** ve **BA**'nın sonuç dizeyleri aynı boyutta olmayabilir:
$$\mathbf{A}_{K\times L}\mathbf{B}_{L\times K} = \mathbf{C}_{K\times K} \qquad \mathbf{B}_{L\times K}\mathbf{A}_{K\times L} = \mathbf{D}_{L\times L}$$
3. $\mathbf{A}_{1\times K}$ satır yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{K\times 1}$ sütun yöneyi bir sayıl olur.
4. $\mathbf{A}_{K\times 1}$ sütun yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{1\times K}$ satır yöneyi bir dizey olur.
5. Dizey çarpımı birleştiricidir: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
6. Dizey çarpımı toplama bakımından dağıtıcıdır:
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Dizey Devriği Alma

Dizey Devriği Alma

$M \times N$ bir **A** dizeyinin **A**$'$ ile gösterilen "devriği" (transpose), **A**'nın satır ve sütunlarına yer değiştirterek, yani **A**'nın i'inci satırını **A**$'$'nün i'inci sütunu yaparak elde edilen $N \times M$ dizeyidir.

$$\mathbf{A}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}'_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bir satır yöneyinin devriği sütun yöneyi olup, bir sütun yöneyinin devriği de satır yöneyidir.

Devrik Dizeyin Özellikleri

Devrik dizey dönüşümünün bazı özellikleri şunlardır:

1. Devrik bir dizeyin devriği ilk dizeydir: $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$
2. İki dizey toplamının devriği, devriklerin toplamıdır:
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$
3. Dizey çarpımının devriği, bu dizeylerin devriklerinin ters sırada çarpımıdır: $(\mathbf{ABCD})' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$
4. Birim dizey **I**'nın devriği kendisidir: $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$
5. Bir sayılın devriği kendisidir. λ bir sayıl olsun: $\lambda' = \lambda$
6. λ bir sayıl olsun: $(\lambda\mathbf{A})' = \lambda\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\lambda = \mathbf{A}'\lambda'$
7. **A** dizeyi eğer $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ olacak şekilde kare dizeyse, **A** bakışımlı bir dizey olur.

Bir Dizeyin Belirleyeni

- Her kare dizey **A** için, belirleyen (determinant) diye bilinen ve $|\mathbf{A}|$ şeklinde gösterilen bir sayıl vardır.
- Bir dizeyin belirleyeninin hesaplanması, iyi tanımlı bir dizi işlem ile gerçekleştirilir.
- Örnek olarak 2×2 boyutundaki bir dizeyin belirleyeni, asal köşegen üzerindeki öğelerin çarpımından diğer köşegen öğelerinin çarpımının çıkartılması ile bulunur.
- Herhangi bir derecedeki belirleyenin açılımında, terimler dönüşümlü olarak $+$ ve $-$ işaret alırlar.
- 3×3 bir belirleyenin açılımında 6 terim bulunur. Genel olarak, $N \times N$ bir belirleyenin açılımında $N!$ terim vardır.
- Buna göre, 5×5 bir dizeye ait belirleyenin açılımında $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ terim bulunur.

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Belirleyenin Özellikleri

Belirleyenin özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. Belirleyeni sıfır olan dizeye "tekil dizey" (singular matrix) denir. Bir tekil dizeyin tersi bulunamaz.
2. **A**'nın herhangi bir satırındaki tüm öğeler sıfırsa, belirleyeni de sıfır olur.
3. **A** ile devrik **A**'nın belirleyenleri aynıdır: $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
4. **A** dizeyinin herhangi iki satır ya da sütunu yer değiştirirse, $|\mathbf{A}|$'nın işareti değişir.
5. **A**'nın iki satır ya da sütunu aynıysa, belirleyeni sıfır olur.
6. **A**'nın bir satır ya da sütunu başka bir satır ya da sütununun bir katı ya da doğrusal bir birleşimiyse, belirleyeni sıfırdır.
7. **A**'nın bir satır ya da sütunundaki tüm öğeler bir λ sayılı ile çarpılırsa, $|\mathbf{A}|$ da λ ile çarpılır.
8. İki dizeyin çarpımının belirleyeni dizeylerin ayrı ayrı belirleyenlerinin çarpımına eşitir: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

Bir Dizeyin Derecesi

Bir Dizeyin Derecesi

Bir dizeyin "derecesi" (rank), belirleyeni sıfır olmayan en büyük alt dizeyinin boyutudur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen dizeyin 1. satırının 2. ve 3. satırların doğrusal bir birleşimi olduğu görülmektedir:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Buna göre, **A** tekil bir dizeydir ve $|\mathbf{A}| = 0$ olmaktadır.
- Diğer taraftan, **A**'nın derecesi 2'dir çünkü 2×2 boyutlu altdizeylerinden birinin belirleyeni sıfırdan farklıdır:

$$\mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Minör

Minör

$N \times N$ boyutundaki bir **A** dizeyinin i'inci satırı ile j'inci sütunu silinirse, kalan altdizeyin belirleyenine a_{ij} öğesinin "minörü" (minor) denir ve $|\mathbf{M}_{ij}|$ ile gösterilir.

- Örnek olarak aşağıda verilen dizeyi ele alalım:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Burada a_{11}'in minörü şudur:

$$|\mathbf{M}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

Eşçarpan Dizey ve Ek Dizey

Eşçarpan

$N \times N$ boyutlu bir **A** dizeyinin a_{ij} öğesinin "eşçarpanı" (cofactor) şöyle tanımlanır: $c_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$

- Bir başka deyişle eşçarpan işaretli bir minördür ve işareti de $(i + j)$ toplamı çiftse artı, tekse eksidir.

Eşçarpan Dizeyi

A'nın "eşçarpan dizeyi" (cofactor matrix), a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak elde edilir ve (cof **A**) ile gösterilir.

Ek Dizey

"Ek dizey" (adjoint matrix), eşçarpan dizeyinin devriğidir ve (adj **A**) ile gösterilir.

Ters Dizey

Dizey Tersi Hesaplama

$\mathbf{A}$ tekil olmayan ($|\mathbf{A}| \neq 0$) bir dizeyse, $\mathbf{A}^{-1}$ "ters" (inverse) dizeyi şu şekilde bulunur:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\text{adj}\mathbf{A})$$

Dizey tersi hesaplama işleminin adımları aşağıdaki gibidir:

1. **A**'nın belirleyeni hesaplanır.
2. **A**'nın a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak eşçarpan dizeyi (cof **A**) elde edilir.
3. Eşçarpan dizeyin devriği alınarak ek dizey (adj **A**) bulunur.
4. Son olarak ek dizeyin tüm öğeleri $|\mathbf{A}|$'ya bölünür.

Dizeylerde Türev Alma

Dizeylerde türev almaya ilişkin iki önemli kural şunlardır:

1. Eğer $\mathbf{a}'$ $1 \times N$ boyutunda bir satır yöneyi ve $\mathbf{x}$ de $N \times 1$ boyutlu bir sütun yöneyi ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

2. Eğer $\mathbf{A}$ $N \times N$ boyutunda bir kare dizeyse, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Doğrusal modelin dizey gösterimi