Bölüm 9

Zaman Serileri Ekonometrisine Giriş

9.1 Bazı Temel Kavramlar

- Önceki bölümlerde zaman serilerine dayanan bağlanım modellerinde verilerin *"durağan"* (stationary) olmasının önemli olduğunu söylemiştik.

- Eğer zaman serileri durağan değilse, SEK katsayı tahmin ve çıkarsama sonuçları kuşkulu duruma gelebilir.

- Bu bölümde; durağanlık kavramını anlatacak, durağanlığa ilişkin sınama yöntemlerinden söz edecek, ve durağan-dışı seriler arasında gözlenebilen ilişkileri inceleyeceğiz.

- Ayrıca, uygun dönüştürmeler ile durağanlaştırılan zaman serileri ile *"yordama"* (forecast) yapılması konusunu da ele alacağız. Bu bağlamda Box-Jenkins ve yöney özbağlanım modellerini tartışacağız.

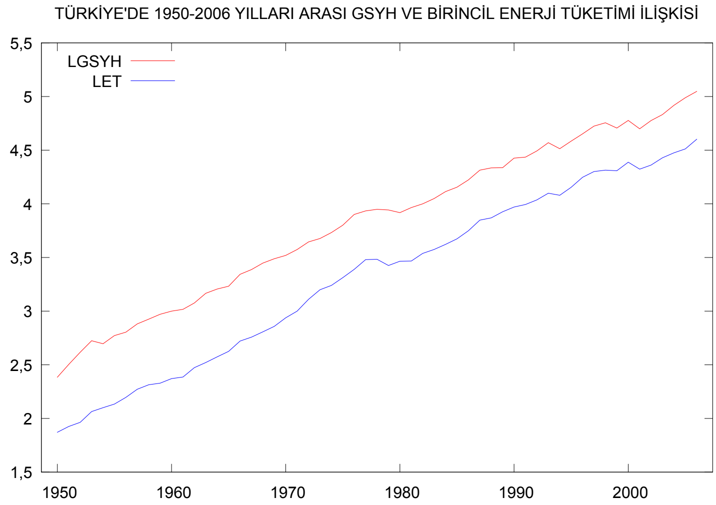
- Konuya hızlı bir giriş yapmak amacıyla, 1950 - 2006 yılları arasında Türkiye'de milli gelir ve birincil enerji tüketimi yıllık zaman-serisi verilerini ele alalım.

- Zaman serileri çözümlemesinin ilk adımı verilerin görsel olarak incelenmesidir.

- Büyüme oranını daha iyi görmek için, genellikle serilerin doğal logaritmalarına bakmayı yeğleriz.

- 1987 fiyatlarıyla GSYH (milyon TL) doğal logaritmasını LGSYH ile gösterelim.

- Milyon ton eşdeğer petrol cinsinden birincil enerji tüketimi doğal logaritması da LET olsun.



9.1.1 Durağanlık ve Rastsal Yürüyüş

Olasılıksal Süreçler

- Türkiye verilerinden edindiğimiz ilk izlenim, her iki serinin dalgalanmakla birlikte genel bir artış eğiliminde olduğudur.
- Bilmek istediğimiz asıl önemli konu ise serilerin örneklem dönemi sonrasında, diğer bir deyişle gelecekte nasıl bir yön izleyecekleridir.
- Bu soruyu yanıtlayabilmek ise bu serileri ortaya çıkaran *"veri oluşturan süreç"* (data generating process) ya da kısaca *"VOS"* (DGP) konusunu inceleyerek olur.
- Genel olarak, tüm zaman serilerinin ardında ekonomik ve politik ortamın yansıması olan bir rastsal ya da *"olasılıksal"* (stochastic) VOS yattığı varsayılır.
- Çizitte gördüğümüz türden veri setlerinin de böyle süreçlere ait gerçekleşme kümeleri oldukları düşünülür.
- Olasılıksal süreç ile ona ait gerçekleşmeler, yatay kesit verilerindeki anakütle ve örneklem kavramları gibidir.

Zaman serileri çözümlemesindeki temel süreçlerden birisi *"durağan"* (stationary) olasılıksal süreçtir.

Durağan Süreç

Ortalaması ve varyansı zaman içerisinde değişmeyen ve iki dönem arasındaki kovaryansın ise bakılan döneme değil de dönemlerin arasındaki uzaklığa bağlı olduğu süreçtir.

- Açıklamak için aşağıdaki gibi bir Y_t serisi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= \mu \\ \text{var}(Y_t) &= \gamma_0 \\ \text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) &= \gamma_k \end{aligned}$$

- Şimdi, başlangıç noktasını t'den $t + k$'ye kaydırdığımızı düşünelim. Eğer Y durağan ise Y_t ve Y_{t+k} serilerinin ortalama, varyans ve kovaryansları aynı olmalıdır.
- *Dikkat:* $k = 0$ olduğunda $\text{cov}(Y_t, Y_{t+0}) = \text{var}(Y_t) = \sigma^2$'dir.
- Tanımımıza göre durağan bir zaman serisi; ortalaması, varyansı ve kovaryansı zamandan bağımsız olan seridir.
- Böyle bir seri, kendi ortalaması çevresinde sabit genişlikte salınımlar gösterir. Bu özelliğe *"ortalamaya dönüş"* (mean reversion) de denir.
- Bu şekildeki durağan seriler yazında farklı adlandırmalarla karşımıza çıkabilmektedir:

"zayıf durağan" weakly stationary,
"kovaryans durağan" covariance stationary,
"ikinci-derece durağan" second-order stationary.

Beyaz Gürültü Süreci

- Ekonometrideki özel ve önemli bir durağan süreç türü, *"saf rastsal"* (pure random) ya da *"beyaz gürültü"* (white noise) adı verilen olasılıksal süreçtir.
- Bu sürecin özelliği ise sıfır ortalamalı, σ^2 sabit varyanslı ve özilintisiz olmasıdır.
- Böyle bir süreç eğer aynı zamanda bağımsız, özdeş ve normal dağılımlı ise buna da *"Gaussçu beyaz gürültü"* (Gaussian white noise) adı verilir.
- Klasik normal bağlanım modelindeki hata teriminin bu şekilde dağıldığını varsaydığımızı ve bunu da daha önce $u_i \sim \text{NBD}(0, \sigma^2)$ şeklinde gösterdiğimizi anımsayalım.

Rastsal Yürüyüş Süreci

- Durağan serilerden farklı olarak; ortalaması, varyansı ya da bunların her ikisi birden zamana bağlı olarak değişen serilere *"durağan-dışı"* (non-stationary) seri denir.
- Durağan dışılığın klasik örneği ise *"rastsal yürüyüş"* (random walk) sürecidir.
- Rastsal yürüyüş, en basit şekliyle şöyle gösterilir:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

- Burada u_t beyaz gürültüdür.
- Rastsal yürüyüşün özilinti konusunda görmüş olduğumuz Markov birinci derece özbağlanımsal tasarımla yakın ilişkili olduğuna dikkat edelim:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t, \qquad -1 < \rho < 1$$

- Rastsal yürüyüşte $\rho = 1$ olduğu için, bu sürece *"birim kök"* (unit root) süreci de denilmektedir.
- Rastsal yürüyüş sürecinde u_t sarsıntıları kalıcıdır:

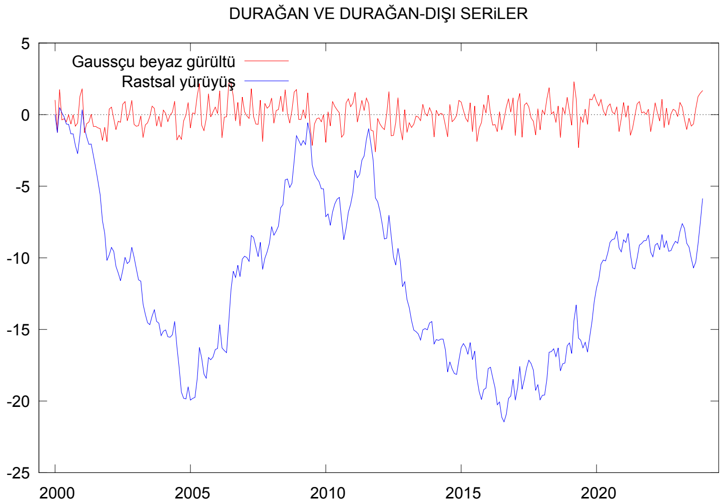
$$\begin{aligned} &Y_1 = Y_0 + u_1 \\ &Y_2 = Y_1 + u_2 = Y_0 + u_1 + u_2 \\ &Y_3 = Y_2 + u_3 = Y_0 + u_1 + u_2 + u_3 \end{aligned}$$

- Kısaca, t dönemindeki değer şöyle yazılabilir:

$$Y_t = Y_0 + \sum u_t$$

- Herhangi bir dönemdeki değerin daha önceki tüm rastsal sarsıntıların toplamı olmasına, rastsal yürüyüşün *"sonsuz bellek"* (infinite memory) özelliği de denir.
- $E(u_t) = 0$ olduğundan, $E(Y_t) = Y_0$ olduğuna dikkat edelim. Diğer bir deyişle Y_t'nin ortalaması sabittir.
- Öte yandan, rastsal hatalar toplandığı için, var(Y_t) sürekli artmakta ve böylece durağanlık varsayımı çiğnenmektedir.

- Y_t'nin varyansının $\text{var}(Y_t) = t\sigma^2$ olduğu gösterilebilir. Buna göre, t sonsuza giderken varyans da sonsuza gitmektedir.



9.1.2 Durağanlığı Sınamak

- Zaman serileri çözümlemesinde serilerin durağan olması önemlidir, çünkü bir seri eğer durağan değilse farklı veri setlerinde farklı görüntüler sergiler.
- Bu durumda serinin davranışı diğer dönemlere genellenemez ve geleceği tahmin etmek için yararlı olmaz.
- Durağanlık aranan bir özellik olduğuna göre, elimizdeki bir zaman serisinin durağan olup olmadığını bilmek isteriz.
- Uygulamada bir serinin durağan olup olmadığını anlamak çeşitli biçimsel ve biçimsel-dışı yöntemlere konu olur.

Özilinti İşlevi

- Durağanlığı anlamaya yönelik biçimsel-dışı bir yaklaşım çizim yöntemidir.
- Örnek olarak, Türkiye verilerine baktığımızda milli gelir ve enerji tüketimi varyanslarının 1978 öncesi ve sonrasında farklılık gösterdiği izlenimine kapılırız.
- Ancak bu şekilde kesin bir sonuca varmak zor olabilir.

- Bu noktada işimize yarayabilecek bir sınama yöntemi ise *"özilinti işlevi"* (autocorrelation function) ya da kısaca *"Öİİ"* (ACF) denilen ölçüte başvurmaktır.

- k gecikme için ρ_k ile gösterilen özilinti işlevi formülü şudur:

$$\rho_k = \frac{\text{gecikme } k \text{ iken kovaryans}}{\text{gecikme } 0 \text{ iken kovaryans}} = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}$$

- ρ_k birimden bağımsızdır ve tüm ilinti katsayıları gibi $[-1,1]$ aralığında yer alır.

- Yukarıda verdiğimiz ρ_k tanımı olasılıksal sürece, diğer bir deyişle anakütleye aittir.

- Uygulamada ise yalnızca gerçekleşmeleri görebildiğimiz için örnekleme ait $\hat{\gamma}_k$ ve $\hat{\sigma}^2$ değerlerini kullanırız:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n-k} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(Y_t - \bar{Y})^2}{n-1}$$

- Bu durumda örneklem özilinti işlevi $\hat{\rho}_k$ da şöyle olur:

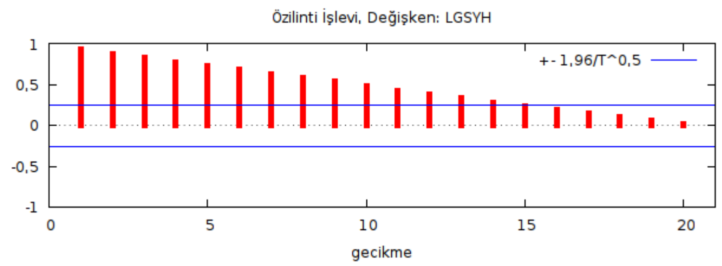
$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\sigma}^2}$$

- Öyleyse $\hat{\rho}_k$, gecikme sayısı k iken örneklem kovaryansının örneklemin varyansına oranından başka birşey değildir.

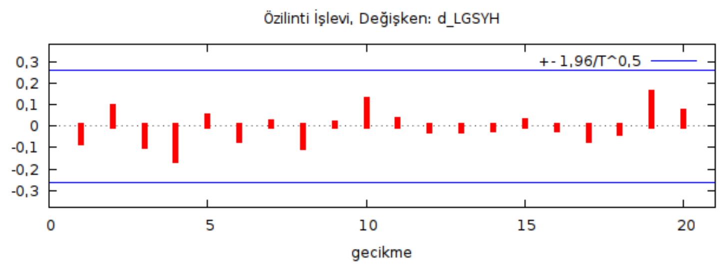
- $\hat{\rho}_k$'nın k'ye göre çizimine *"ilintiçizit"* (correlogram) denir.

- Bir serinin durağan olup olmadığını anlamanın bir yolu işte bu örneklem ilintiçizitini incelemektir.

- Örnek olarak, reel GSYH serimize ait ilintiçizit şöyledir:



- Yukarıdaki ilintiçizite bakınca, gecikme sayısı k artarken $\hat{\rho}_k$'nın düzenli olarak azaldığını ancak 10 gecikme sonra bile yüksek değerler almayı sürdürdüğünü görüyoruz.
- Bu örüntü, serinin durağan olmadığının bir göstergesidir.
- Bir $\hat{\rho}_k$'nın istatistiksel olarak sıfırdan farklı olup olmadığını anlamak için ölçünlü hatasından yararlanılır.
- İngiliz istatistikçi M. S. Bartlett, bir zaman serisi bütünüyle rastsal ise $\hat{\rho}_k$'nın da 0 ortalama ve $1/n$ varyans ile yaklaşık normal dağıldığını göstermiştir.
- Bu bilgiden ve ölçünlü normal dağılımın özelliklerinden yararlanarak herhangi bir $\hat{\rho}_k$'nın güven aralığı bulunabilir.
- Örnek olarak, LGSYH serimizde 57 gözlem olduğuna göre, örneklem varyansını $1/57 = 0{,}0175$ ve örneklem ölçünlü hatasını da $1/\sqrt{57} = 0{,}1325$ olarak hesaplarız.
- Bu durumda tahmin edilen $\hat{\rho}_k$'ların $\%95$ güven aralığını da $\pm 1{,}96(0{,}1325) = 0{,}2597$ olarak buluruz. Demek ki $\hat{\rho}_k$ $(-0{,}2597, 0{,}2597)$ aralığında ise 0 olduğu reddedilmez.
- Gretl, bu güven aralığını iki lacivert çizgi ile göstermiştir.
- Durağan-dışı serilerdeki sıfırdan anlamlı derecede büyük ve düzenli azalan özilintiler, durağan serilerde görülmez.
- Durağan bir seride tüm ilintilerin sıfıra yakın çıkması beklenir.
- Örnek olarak, durağan bir serinin ilintiçiziti şöyledir:



- Tüm $\hat{\rho}_k$'ların iki lacivert çizgi arasında yer aldığına ve dolayısıyla 0 olduklarının reddedilmediğine dikkat ediniz.

Birim Kök Sınaması

- Durağan-dışılığı sınamanın uygulamadaki en yaygın yolu, biçimsel birim kök sınamasına başvurmaktır.
- Birinci derece özbağlanımsal modeli anımsayalım:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$$

- Eğer $\rho = 1$ ise serinin durağan-dışı olduğunu ve bu sürece de birim kök süreci dendiğini biliyoruz.
- Birim kök sınamasındaki genel düşünce ρ'nun istatistiksel olarak 1'e eşit olup olmadığını sınamaktır.
- Bu doğrultuda, elde edilecek sonuçlarının daha güvenilir olabilmesi için yukarıdaki model genellikle şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} &= \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + u_t \\ \Delta Y_t &= (1-\rho) Y_{t-1} + u_t \\ &= \delta Y_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

- Bu modelde $H_0 : \delta = 0$ sıfır önsavının sınanmasına *"Dickey-Fuller"* ya da kısaca *"DF"* birim kök sınaması denir.
- DF sınamasını uygulamak, olası birim kök sürecinin doğasına ilişkin bazı seçimler yapmayı gerekli kılar.
- Dolayısıyla, sınama için şu dört ayrı belirtim kullanılabilir:

Sabit terim olmadan:	$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ile:	$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ve eğilim:	$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t$
Sabit terim ve üstel eğilim:	$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \delta Y_{t-1} + u_t$

- Yukarıdaki belirtimlerden hangisinin kullanılacağına görsel inceleme sonunda karar verilir.
- Örnek olarak, seride doğrusal bir artış eğilimi gözleniyorsa sabit terim ve eğilim seçeneği kullanılır.
- DF sınamasında u_t'nin özilintisiz olduğu varsayılmaktadır.

- Bu çoğunlukla geçerli olmadığı için, yukarıda gösterdiğimiz model belirtimlerinin sonlarına ΔY_t'nin gecikmeli değerleri eklenerek sınama genişletilmiştir.
- Bu yeni sınamaya *"Genişletmeli Dickey-Fuller"* (Augmented Dickey-Fuller) ya da kısaca *"ADF"* sınaması denir.
- Örnek olarak, sabit terimsiz ADF sınama belirtimi şöyledir:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta Y_{t-i} + u_t$$

- Buradaki gecikme derecesi m genellikle Akaike gibi bilgi ölçütlerine dayanılarak, görgül olarak belirlenmektedir.

DF ve ADF sınamalarında Y_{t-1}'nin önündeki δ değiştirgesi ne yazık ki büyük örneklemlerde bile t dağılımını izlememektedir. Dickey ve Fuller, δ'nın örneklem dağılımına τ (tau) adını vermiş ve buna ait kritik değerleri Monte Carlo yöntemi ile bulmuşlardır. Dolayısıyla, ADF sınamasının adımları şöyledir:

1. Sınanacak zaman serisi incelenir ve var olduğu düşünülen olasılıksal sürece uygun sınama belirtimi seçilir.
2. Model tahmin edilir ve aşağıdaki τ istatistiği hesaplanır.

$$\tau = \frac{\hat{\delta}}{\text{öh}(\hat{\delta})}$$

3. Sıfır önsavı $H_0 : \delta = 0$ ve almaşık önsav ise $H_1 : \delta < 0$ şeklindedir. Diğer deyişle ADF tek kuyruklu bir sınamadır.
4. Hesaplanan sınama istatistiği çizelgeden bulunan kritik τ değerinden büyükse, birim kök sıfır önsavı reddedilir.

- ADF sınamasına bir açıklayıcı örnek olarak, Türkiye'de milli gelir ve birincil enerji tüketimi verilerimize dönelim.
- LGSYH ve LET'in doğrusal bir artış eğiliminde olduklarını dikkate alarak, sınamamızı sabit terim ve eğilim kullanarak yapmalıyız.
- Gecikme derecesi için ise $m = 1$ kullanalım.
- Birim kök olduğu sıfır önsavı altında, LGSYH ve LET için ADF sınama istatistikleri sırasıyla $\tau_{\text{LGSYH}} = -2{,}7858$ ve $\tau_{\text{LET}} = -1{,}6116$ olarak bulunur.

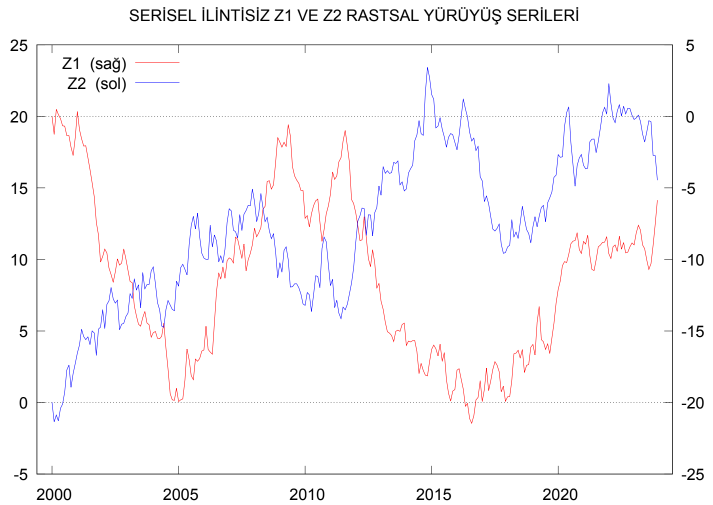
- Bu değerlere karşılık gelen kavuşmazsal p-değerleri ise 0,2025 ve 0,7888'dir.
- Buna göre milli gelir ve enerji tüketiminin logaritmalarının durağan-dışı olduğunu reddetmiyoruz.

9.1.3 Düzmece Bağlanım ve Eştümleşim

- Durağan olmayan serilere dayanan SEK katsayı tahmin ve çıkarsama sonuçlarının kuşkulu olabileceğini söylemiştik.
- Bu olguyu ayrıntılı olarak tartışabilmek için aşağıdaki iki rastsal yürüyüş serisini ele alalım.

$$Z_{1t} = Z_{1t-1} + u_t$$
$$Z_{2t} = Z_{2t-1} + v_t$$

- u_t ve v_t birbirinden bağımsız ve ölçünlü normal dağılımlı hata terimleridir.
- Açıkça görüldüğü gibi Z_{1t} ve Z_{2t} durağan-dışıdırlar ve aynı zamanda da *"serisel ilintisiz"* (serially uncorrelated) serilerdir.



- Elimizdeki değişkenler ilintisiz olduğuna göre aralarında herhangi bir ilişki bulunamaması beklenir.
- Z_{1t}'nin Z_{2t}'ye göre bağlanımını hesapladığımızda ise şu şaşırtıcı sonuçlarla karşılaşırız:

$$\begin{array}{llll} \hat{Z_{1t}} = & -5{,}7310 & -\ 0{,}4519\ Z_{2t} & \\ \text{öh} & (0{,}7474) & (0{,}0553) & r^2 = 0{,}1895 \\ t & (-7{,}6682) & (-8{,}1768) & d = 0{,}0372 \end{array}$$

- Sonuçlara göre Z_{2t} istatistiksel olarak anlamlıdır ve r^2 de sıfır olması gerekirken $\%20$'ye yakın bulunmuştur.
- Durağan olmayan seriler arasında büyük örneklemlerde bile görülebilen yukarıdaki gibi bir asılsız ilişkiye *"düzmece bağlanım"* (spurious regression) adı verilir.
- Durbin-Watson d değerinin düşük çıktığına dikkat edelim.
- Granger ve Newbold'a göre $R^2 > d$ olması, tahmin edilen bağlanımın düzmece olabileceğinin iyi bir göstergesidir.
- Düzmece bağlanımdan kaçınmak için yapılması gereken şey durağan veriler ile çalışmaktır.
- Bu nedenle uygulamada durağan-dışı seriler genellikle önce farkları alınarak durağanlaştırılır ve daha sonra da bağlanım çözümlemesine geçilir.
- Ancak bu durumda ilaç hastalıktan beter olabilir çünkü farkların bağlanımını hesaplamak değişkenler arasındaki uzun dönem ilişkinin yitirilmesi demektir.
- Çoğu iktisat kuramının iki dönem arasındaki değişmeleri değil, uzun dönemli ilişkileri konu aldığını anımsayalım.
- Para arzı ile fiyatlar, kamu harcaması ile vergi gelirleri, faiz oranları ile yatırım harcamaları, kalıcı gelir ile kalıcı tüketim gibi ilişkileri genellikle düzey olarak ele almak isteriz.
- Durağan-dışı serilerin düzeyleri ile çalışabilme gereksinimi, ekonometricileri yeni yöntemler geliştirmeye yöneltmiştir.

Eştümleşim

- Türkiye'de gayrisafi yurtiçi hasıla ve birincil enerji tüketimi örneğimize geri dönelim.
- İki serinin de durağan-dışı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bunlara dayalı bir bağlanım düzmece sonuçlar verme riski taşımaktadır.
- Öte yandan, görsel olarak incelediğimizde LGSYH ile LET arasındaki ilişkinin Z_{1t} ile Z_{2t} arasındaki düzmece ilişkiden farklı olduğu izlenimine kapılırız.

- Z_{1t} ve Z_{2t}'den farklı olarak, LGSYH ve LET durağan dışı bir davranış göstermekte ancak bu davranışlarını birlikte ve bir uyum içerisinde sürdürmektedirler.
- Bu birçok iktisadi zaman serisinde görülebilen bir özelliktir.
- 1987 tarihli ortak çalışmalarında, Nobel ödüllü iki iktisatçı Clive Granger ve Robert Engle bu olguyu çözümlemiş ve *"eştümleşim"* (cointegration) olarak adlandırmışlardır.

- Milli gelir ve enerji tüketimine ilişkin şu modeli ele alalım:

$$\text{LGSYH}_t = \beta_1 + \beta_2 \text{LET}_t + \epsilon_t$$

- Yukarıdaki bağlanımı tahmin ettiğimizi ve birim kök sınaması sonucunda ϵ_t'nin durağan çıktığını düşünelim.
- ϵ_t'yi şöyle de yazabildiğimize dikkat ediniz:

$$\epsilon_t = \text{LGSYH}_t - \beta_1 - \beta_2 \text{LET}_t$$

- Demek ki elimizdeki iki seri tekil olarak durağan-dışı ya da $I(1)$ olurken, bunların doğrusal bir birleşimi durağan ya da $I(0)$ olabilmektedir.
- Kısaca durağan-dışı eğilimler birbirini götürmekte, böylece değişkenler uzun dönemli bir denge ilişkisi sergilemektedir.
- Bu durumda LGSYH_t ve LET_t eştümleşik seriler olurlar.
- Ayrıca, en üstteki bağlanıma *"eştümleyen bağlanım"* (cointegrating regression), β_2'ye de *"eştümleyen değiştirge"* (cointegrating parameter) adı verilir.

Eştümleşimi Saptamak

- Eştümleşimin yararı, bu durumda bağlanımın düzmece olmaması ve SEK tahmin ve çıkarsama sonuçlarının geçerliliğini korumasıdır.
- Demek ki eştümleşik serileri fark almadan kullanabiliriz ve böylece değişkenler arasındaki uzun dönem ilişki bilgisini de yitirmeyiz.
- Bunu yapabilmek için ise ilk önce eştümleşimin var olup olmadığını sınamalıyız.

- Bu amaç için sıklıkla kullanılan bir yöntem, Johansen ve Juselius'un 1990 yılında önerdiği eştümleşim sınamasıdır.
- Burada bizim tartışabileceğimiz daha basit bir yaklaşım ise bağlanım kalıntıları üzerinde birim kök sınaması yapmaya dayanan Engle-Granger sınamasıdır.

Engle-Granger eştümleşim sınamasının adımları aşağıdaki gibidir:

1. Değişkenlerin durağan-dışı olduklarını doğrulamak için, önce değişkenler üzerinde tek tek ADF sınaması yapılır.
2. Bağlanım modeli tahmin edilir ve kalıntılar saklanır.
3. Kalıntılar üzerinde de ADF birim kök sınaması uygulanır.
4. Tüm tekil değişkenler için birim kök önsavı reddedilmezken eştümleyen bağlanım kalıntıları için birim kök sıfır önsavı reddedilirse, eştümleşim için elde delil var demektir.

- Açıklayıcı bir örnek olarak, Türkiye'deki milli gelir ve enerji tüketimi serilerimize dönelim.
- LGSYH ve LEC'nin tekil olarak durağan-dışı olduğunu bularak, birinci adımı daha önceden tamamlamıştık.
- Elimizdeki bağlanım modeli kalıntılarına ADF sınaması yaptığımızda ise p-değeri 0,0125 çıkmakta ve böylece kalıntılar için birim kök önsavı reddedilmektedir.
- Öyleyse Engel-Granger sınamasına dayanarak serilerin eştümleşik olduğunu reddetmiyoruz.

Hata Düzeltme Modeli

- LGSYH ve LEC'nin eştümleşik olması demek, bu serilerin kısa dönemde olasılıksal uyumsuzluklar gösterebilecekleri ancak uzun dönemde hep bir denge ilişkisine dönecekleri anlamına gelir.
- Bu ilişkiyi incelemek için uygun yöntem ise *"hata düzeltme düzeneği"* (error correction mechanism) ya da kısaca *"HDD"* (ECM) denilen yaklaşımdır.
- Hata düzeltme modeli, milli gelir ve enerji örneğimizdeki eştümleyen bağlanıma ait ϵ_t hatalarından şöyle yararlanır:

$$\Delta\text{LGSYH}_t = \beta_1 + \beta_2 \Delta\text{LET}_t + \beta_3 \epsilon_{t-1} + u_t$$

- Buradaki ϵ_{t-1} terimi ΔLGSYH ve ΔLET arasındaki ilişkinin uzun dönem dengesinden ne kadar uzakta olduğunu ölçer.
- Eksi değerli olması beklenen β_3 ise uzun dönem denge ilişkisinde geçici bir sapma olduğunda dengeye ne kadar çabuk geri dönüleceğini gösterir.

9.2 Box-Jenkins Yöntemi

- Ekonometrik çözümlemenin belki de en önemli amacı değişkenlerin gelecek değerlerini tahmin etmek, diğer bir deyişle *"yordama"* (forecasting) yapmaktır.
- Durağan zaman serilerini modellemenin yaygın yollarından biri ise *"özbağlanımsal tümleşik hareketli ortalama"* (autoregressive integrated moving average) ya da kısaca *ARIMA* yöntemidir.
- George Box ve Gwilym Jenkins tarafından geliştirilen bu yaklaşıma Box-Jenkins (BJ) yöntemi de denilmektedir.
- Box-Jenkins yönteminin temel vurgusu, zaman serilerini yalnızca kendi geçmiş değerleri ve olasılıksal hata terimi ile açıklamaktır.
- Herhangi bir iktisat kuramına dayanmayan ve "bırakın da veriler kendi adlarına konuşsun" mantığı ile oluşturulan bu modellere *"kuramsız"* (atheoric) modeller de denir.

Özbağlanımsal Süreç

- Tüm zaman serilerinin ardında bir veri oluşturan süreç yattığı varsayımımızı anımsayalım.
- Örnek olarak, bu süreç daha önce özilinti konusunda görmüş olduğumuz birinci derece *"özbağlanımsal tasarım"* (autoregressive scheme) AR(1) olabilir:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + u_t$$

- Bu tasarıma göre Y'nin t dönemindeki değeri, bir önceki dönemdeki değer ve rastsal hata terimine bağlıdır.
- Genel olarak, p'inci derece özbağlanımsal süreç, ya da kısaca AR(p) şöyle gösterilir:

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + u_t$$

- Modelde Y'nin şimdiki ve gecikmeli değerlerinden başka değişken olmadığına dikkat ediniz. İşte "veriler kendi adlarına konuşsun" diyerek anlatılmak istenen budur.

Hareketli Ortalama Süreci

- Bir zaman serisini oluşturabilecek tek tasarım özbağlanımsal süreç değildir.
- Şimdi de Y'nin şöyle modellenebildiğini düşünelim:

$$Y_t = \mu + u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

- Burada Y'nin şimdiki değeri sabit terim artı iki dönemlik hataların ağırlıklı toplamına eşittir.
- Bu tasarıma birinci derece *"hareketli ortalama"* (moving average) süreci denir ve MA(1) ile gösterilir.
- q'ıncı derece hareketli ortalama süreci MA(q)'nun genel gösterimi ise şöyledir:

$$Y_t = \mu + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \cdots + \beta_q u_{t-q}$$

- Demek ki MA süreci sabit sayıda beyaz gürültü hataların zaman içinde hareket eden bir doğrusal birleşimidir.

Özbağlanımsal Hareketli Ortalama Süreci

- Bir zaman serisi hem özbağlanım hem hareketli ortalama özelliklerini de taşıyabilir.
- Bu tasarıma ise *"özbağlanımsal hareketli ortalama"* (autoregressive moving average), kısaca ARMA denir.
- Örnek olarak, hem Y'nin hem de u'nun bir önceki değerlerini içeren ARMA(1,1) süreci şu şekildedir:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

- Genel olarak ARMA(p,q) da şöyle gösterilir:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \cdots + \beta_q u_{t-q}$$

- Yukarıdaki modelde p özbağlanım ve q hareketli ortalama olmak üzere toplam $p + q$ terim bulunmaktadır.

Özbağlanımsal Tümleşik Hareketli Ortalama Süreci

- Yukarıda gösterdiğimiz AR(p), MA(q) ve ARMA(p,q) tasarımları zaman serisinin durağan olduğu varsayımına dayanmaktadır.
- Çoğu iktisadi serinin ise durağan-dışı, diğer bir deyişle tümleşik olduğunu biliyoruz.
- Birinci derece tümleşik, ya da kısaca I(1) olan bir serinin birinci farkının durağan I(0) serisi olduğunu anımsayalım.
- Benzer şekilde I(2) olan bir zaman serisi de iki kez farkı alındığında I(0) olur.
- Genel olarak I(d) olan bir zaman serisinin d kez farkı alındığında durağanlaştığını ve bu serinin daha sonra ARMA(p,q) süreci ile modellenebildiğini düşünelim.
- İşte bu tasarıma da *"özbağlanımsal tümleşik hareketli ortalama"* (autoregressive integrated moving average) süreci denir ve ARIMA(p,d,q) ile gösterilir.

Box-Jenkins Yönteminin Adımları

- ARIMA(p,d,q) sürecinin AR(p), MA(q) ve ARMA(p,q) süreçlerini kapsayıcı olduğuna dikkat ediniz.
- Örnek olarak, bir ARMA(1,1) modeli ARIMA(1,0,1) şeklinde ve bir MA(2) modeli de ARIMA(0,0,2) şeklinde yazılabilir.
- Demek ki farklı zaman serilerini anlatmak için p, d ve q değerlerini bilmek yeterli olabilmektedir.
- Box-Jenkins yönteminin yararı bu noktadadır.
- BJ'nin hedefi, çeşitli zaman serilerini tanımlayan p, d, q değiştirgelerini bulmayı ve daha sonra bu serileri yordama amacıyla tahmin etmeyi kolaylaştırıcı bir yöntem sunmaktır.

Box-Jenkins yöntemi şu dört adımdan oluşmaktadır:

1. *Özdeşleme:* Zaman serisine ait p, d, q değerleri bulunur.
2. *Tahmin:* Veriler belirlenen modele yakıştırılır.
3. *Tanısal denetim:* Verilerin modele yeterli derecede yakışıp yakışmadığı incelenir ve gerekli ise başa dönülerek yeni değiştirge değerleri seçilir. BJ yinelemesel bir yöntemdir.

4. *Yordama:* Yeterli olduğuna karar verilen model, serinin örneklem dışı değerlerini kestirmek amacıyla kullanılır.

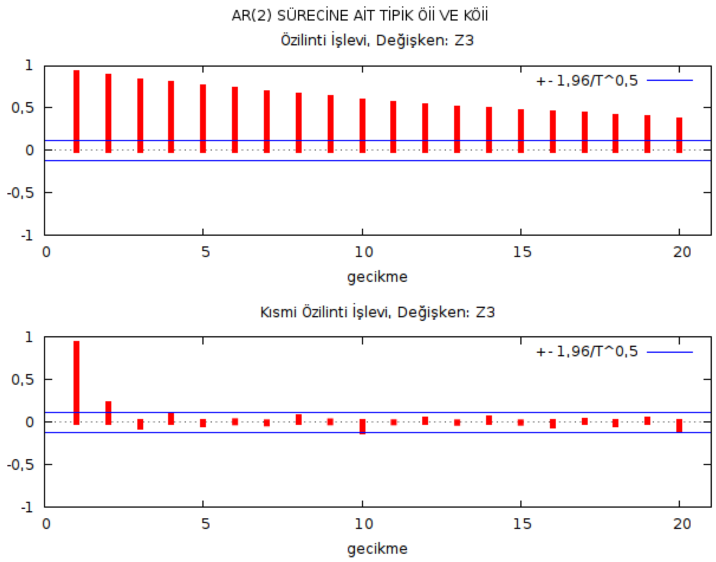
Özdeşleme

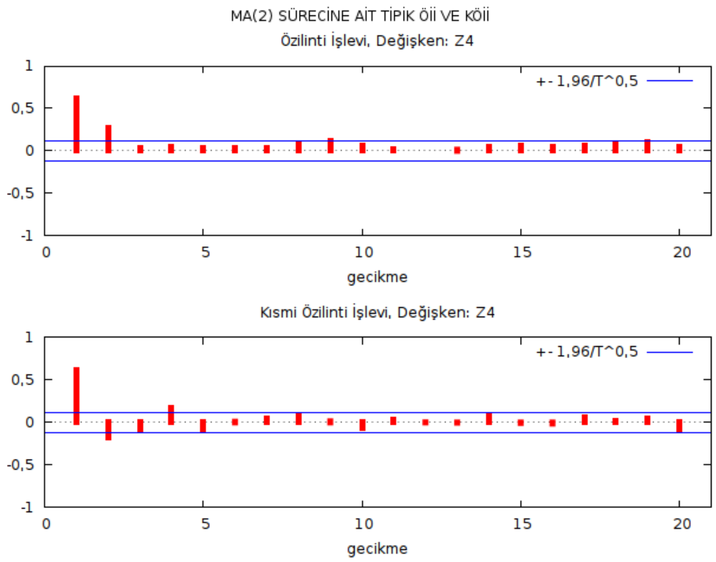
- BJ yönteminde özdeşlemeye ilk önce d değiştirgesinden başlanır ve serinin durağan olup olmadığına bakılır.
- Bu amaçla, daha önce göstermiş olduğumuz gibi ilitiçizit incelenir ya da biçimsel birim kök sınamaları yapılır.
- Seri eğer durağan değilse farkı alınır ve durağanlık tekrar sınanır.
- Yukarıdaki işlem, seri durağanlaşıncaya kadar yinelenir.
- Seri d kez farkı alınarak durağanlaştırıldıktan sonra sıra p ve q değerlerini bulmaya gelir.
- Bunun yolu ise seriye ait ilintiçiziti incelemektir.
- İlintiçizitte bulunan özilinti işlevi ya da kısaca Öİİ'yi daha önce durağanlığın sınanması bağlamında ele almıştık.
- İlintiçizitte yer alan ve BJ yönteminde önemli yeri olan bir ikinci unsur ise *"kısmi özilinti işlevi"* (partial autocorrelation function) ya da kısaca *"KÖİİ"* (PACF) olmaktadır.
- KÖİİ, ρ_{kk} diye gösterilir ve Öİİ'ye benzer şekilde birbirinden k gecikme uzaklıktaki gözlemler arasındaki ilintiyi ölçer.
- Öte yandan KÖİİ, Öİİ'den farklı olarak, k'ye kadar olan ara gecikmeleri denetler ya da diğer deyişle sabit tutar.
- İlintiçizit, artan k değerlerine karşılık gelen KÖİİ'yi vererek özbağlanımsal bir süreçteki gecikme uzunluğu p'yi bulmaya yardımcı olur.
- AR(p), MA(q) ve ARMA(p,q) süreçlerinin kendilerine özgü aşağıdaki Öİİ ve KÖİİ örüntülerini verdikleri bilinmektedir:

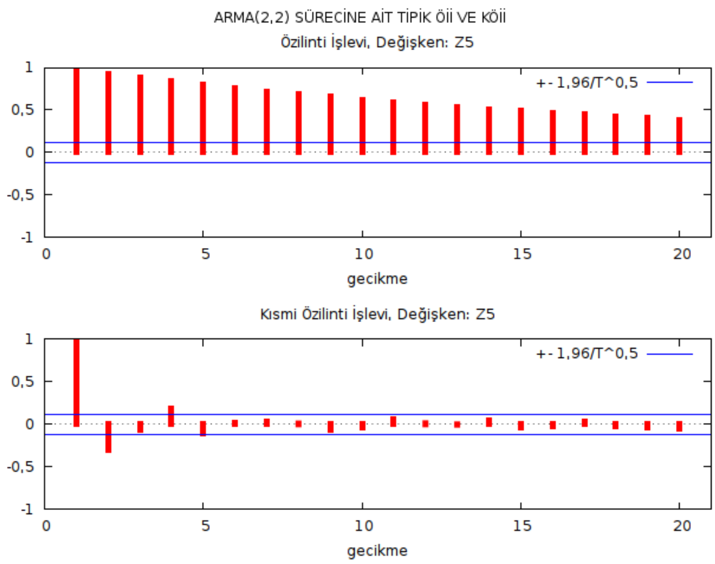
Çizelge: Kuramsal Öİİ ve KÖİİ Örüntüleri

Model	Öİİ Örüntüsü	KÖİİ Örüntüsü
AR(p)	Üstel azalma, azalan sinüs dalgası ya da ikisi birden	p gecikmeye kadar sivrilik
MA(q)	q gecikmeye kadar sivrilik	Üstel azalma
ARMA(p,q)	Üstel azalma	Üstel azalma

- Yukarıdaki ana çizgilerden de yararlanılarak uygun p ve q değerleri seçilir.







Tahmin

- p, d ve q değerleri belirlendikten sonra, Box-Jenkins yöntemindeki ikinci aşama modelin tahmin edilmesidir.
- Bu işlem belli durumlarda SEK yöntemi ile yapılabilse de uygulamada genellikle ençok olabilirlik gibi daha ileri tahmin yöntemleri yeğlenmektedir.
- Gretl gibi ekonometri yazılımları tarafından kolayca yapılan bu hesaplamaların ayrıntılarına burada girmiyoruz.

Tanısal Denetim

- Belli bir ARIMA modeli tahmin edildikten sonraki adım verilerin modele ne derece yakıştığını incelemektir.
- Basit bir tanısal denetim aracı, kalıntılara ait Öİİ ve KÖİİ çizitlerine bakmak ve kalıntıların beyaz gürültü olup olmadığına karar vermektir.
- Bu noktada ayrıca daha önce tartıştığımız AIC, BIC, ve HQC gibi yakışmanın iyiliği ölçütleri de değerlendirilir.
- Tanısal denetimin önemi; farklı p, d, q'lar kullanılarak birbirine yakın yakışmalar elde edilebileceğindendir.
- ARIMA modellemesinin yinelemeli bir süreç olduğu ve deneyimle kazanılan bir ustalık istediği unutulmamalıdır.

Yordama

- İyi bir yakışma gözleniyor ve başka bir model aramaya gerek olmadığı düşünülüyorsa, eldeki model son olarak yordama amacıyla kullanılabilir.
- Verilerin eğer başta farkı alındıysa, önce bu işlem tersine çevrilir. Diğer bir deyişle seriye *"tümlev"* (integral) alma işlemi uygulanır.
- Daha sonra verilerin eldeki geçmiş değerleri formülde yerine koyularak *"bir-adım-ileri yordama"* (one-step-ahead forecast) elde edilir.
- Bu işlemin tekrarlanması ile ikinci ve daha sonraki gelecek dönemlere ait *"çokdönemli yordama"* (multiperiod forecast) değerleri ve bunların ölçünlü hataları da bulunabilir.
- ARIMA yönteminin yaygın olmasının bir nedeni özellikle de kısa dönem yordamalarındaki yüksek başarım düzeyidir.

9.3 Yöney Özbağlanım Modeli

- Bazı değişkenlerin içtürel ve bazı değişkenlerin de dıştürel olarak ele alındığı eşanlı denklem modellerini daha önce incelemiştik.
- Bu modellerdeki değişken seçimi sonucunda ortaya çıkan denklemlerin eksik, tam ya da aşırı özdeşlemeli olabildiğini anımsayalım.
- Eşanlı denklem modellerinin belirtim sürecindeki öznellik, Christopher Sims tarafından güçlü bir şekilde eleştirilmiştir.
- Sims'e göre zaman serisi verilerinde eşanlılık varsa bunlar içtürel-dıştürel ayrımı yapmadan eşit olarak ele alınmalıdır.
- Bu düşünce ile Sims *"yöney özbağlanım modeli"* (vector autoregression model) ya da kısaca *VAR* yaklaşımını geliştirmiştir.
- VAR'ın özelliği, tekdeğişkenli özbağlanım modelini birden çok zaman serisi içeren bir seriler yöneyine genellemesidir.
- k değişkenli bir VAR modelinde herbir değişkenin sırayla bağımlı değişken olduğu k sayıda denklem olur. Her bir denklemdeki gecikme sayısı da p'ye eşittir.
- k değişkenli ve p gecikmeli böyle bir denklem sistemine VAR(p) denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Y_{1t} & = & \alpha_{10} & + & \sum_{j=1}^{p} \beta_{1p} Y_{1t-p} & + \ldots + & \sum_{j=1}^{p} \lambda_{1p} Y_{kt-p} & + & u_{1t} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Y_{kt} & = & \alpha_{k0} & + & \sum_{j=1}^{p} \beta_{kp} Y_{1t-p} & + \ldots + & \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kp} Y_{kt-p} & + & u_{kt}
\end{array}
$$

Yöney Özbağlanım Açıklayıcı Örnek

- Yöntemi açıklamak için, Türkiye'ye ait LGSYH ve LET verilerimize dönelim. Gecikme düzeyi şimdilik $p = 4$ olsun.

- Düzmece bağlanımdan kaçınmak için serilerin farkını kullanacak olursak, iki değişkenli VAR(4) modeli şöyle olur:

$$\begin{aligned}\Delta\text{LGSYH}_t &= \alpha_{10} + \sum_{j=1}^{4}\beta_{1j}\Delta\text{LGSYH}_{t-j} + \sum_{j=1}^{4}\gamma_{1j}\Delta\text{LET}_{t-j} + u_{1t} \\ \Delta\text{LET}_t &= \alpha_{20} + \sum_{j=1}^{4}\beta_{2j}\Delta\text{LGSYH}_{t-j} + \sum_{j=1}^{4}\gamma_{2j}\Delta\text{LET}_{t-j} + u_{2t}\end{aligned}$$

- Görüldüğü gibi modelimizde iki denklem bulunmaktadır.
- İki denklemde de yalnızca ΔLGSYH ve ΔLET'in 1'den 4'e kadar olan gecikmeleri açıklayıcı olarak yer almaktadır.
- Her denklemde sabit terim ile birlikte toplam 9 terim vardır.
- VAR varsayımları altında yukarıdaki model SEK ile tahmin edilebilir, alışık olduğumuz sınama süreçleri uygulanabilir.
- Türkiye örneğimizi tahmin edince şu bulgunlara ulaşıyoruz:

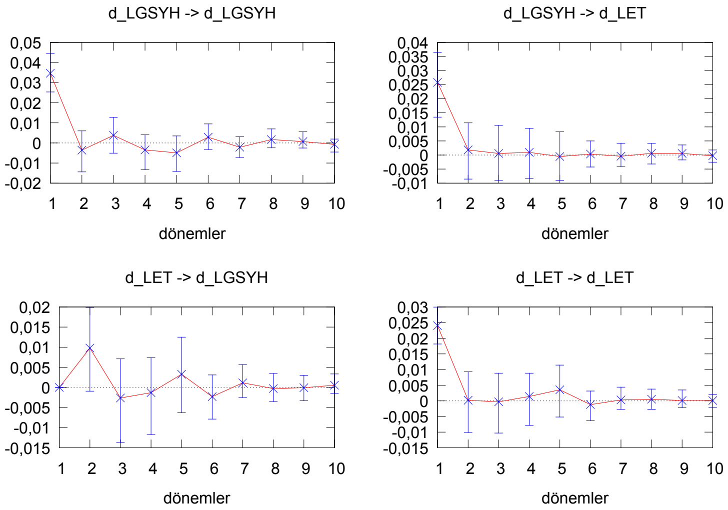
	ΔLGSYH		ΔLET	
Değişken	Katsayı	t-oranı	Katsayı	t-oranı
Sabit	0,05263	3,4539 ***	0,0420	2,7119 ***
ΔLGSYH_{t-1}	−0,4066	−1,9582 *	0,0467	0,2209
ΔLGSYH_{t-2}	0,00641	0,02859	0,0442	0,1936
ΔLGSYH_{t-3}	0,0083	0,04100	−0,0057	−0,0276
ΔLGSYH_{t-4}	−0,2549	−1,4687	−0,1340	−0,7588
ΔLET_{t-1}	0,4070	1,9008 *	0,0081	0,0371
ΔLET_{t-2}	0,0530	0,2288	−0,0317	−0,1344
ΔLET_{t-3}	−0,0960	−0,4443	0,0459	0,2089
ΔLET_{t-4}	0,0895	0,4481	0,1553	0,7640
R^2	0,1610		0,0212	
d	1,9093		1,9307	

- Tahmin sonuçlarına göre, GSYH'deki değişimi açıklamada ΔLGSYH_{t-1} ve ΔLET_{t-1} ($\alpha = 0.1$ düzeyinde) etkilidir.
- LET'deki değişim ise bu iki değişkenin önceki değerleri ile istatistiksel olarak anlamlı derecede açıklanamamaktadır.

- VAR modellerinde çıkarsamaya ilişkin bir özellik, birden çok denklemi kapsayan birleşik önsavların sınanabilmesidir.
- Örnek olarak, modelimizde doğru gecikme düzeyinin 4 mü yoksa 3 mü olduğunu ΔLGSYH$_{t-4}$ ve ΔLET$_{t-4}$'lerin her iki denklemde de aynı anda 0 olduğunu sınayarak bulabiliriz.
- H_0 : $\Delta\text{LGSYH}_{1,t-4} = \Delta\text{LET}_{1,t-4} = \Delta\text{LGSYH}_{2,t-4} = \Delta\text{LET}_{2,t-4} = 0$ önsavına ilişkin χ^2 istatistiğinin p-değeri 0,2735'dir. Öyleyse gecikme derecesi $p = 3$ reddedilmez.
- VAR tahmininde gecikme derecesinin ne olacağını bulmak için yukarıdaki gibi F sınamalarının yanında AIC, BIC, HQC gibi yakışmanın iyiliği ölçütleri de sıkça kullanılır.

Yöney Özbağlanım Dürtüye Tepkiler İşlevi

- VAR modellerinde, bir değişkenin gecikmelerine ait birden fazla katsayıyı aynı anda yorumlamak güç olabilmektedir.
- Bu zorluğa karşı geliştirilmiş etkili bir yaklaşım ise *"dürtüye tepki işlevi"* (impulse response function) hesaplamasıdır.
- Bu yöntem ile denklemlerdeki hata terimlerinde bir ölçünlü sapmalık sarsıntılar yaratılır ve değişkenlerin tepkilerinin zaman içindeki değişimi bulunarak çizit üzerinde incelenir.
- İlk denklemdeki u_{1t}'nin bir ös arttığını düşünelim.
- Modeldeki gecikme terimlerinden dolayı, böyle bir sarsıntı ΔLGSYH'nin hem şimdiki hem de gelecek dönemlerde alacağı değerleri etkileyecektir.
- Ayrıca ΔLGSYH'nin gecikmeleri ikinci denklemde de yer aldığı için ΔLET de benzer şekilde değişecektir.
- Dürtüye tepki işlevi bu değişimleri hesaplayarak bir görsel çözümleme aracı biçiminde değerlendirmemize sunar.



Yöney Özbağlanım Modeline İlişkin Bazı Konular

VAR yönteminin başlıca üstünlükleri şunlardır:

1. İçtürel ve dıştürel değişken ayrımı olmadığı için yöntemi uygulamak son derece kolaydır.

2. SEK yöntemi kullanılabildiği için tahmin ve çıkarsama da basittir.

3. Çoğu zaman görece karmaşık eşanlı modellere göre daha başarılı yordama sonuçları elde edilebilmektedir.

Diğer yandan şu sorunlara da dikkat edilmelidir:

1. VAR modeli de BJ yöntemi gibi kuramdan bağımsızdır.

2. Tüm değişkenler ve gecikmeleri her denklemde yer aldığı için çok sayıda serbestlik derecesi kaybı söz konusudur.

3. Gecikme derecesi seçimi sonuçları değiştirebilmektedir.

4. Durağanlık zorunlu olduğu için fark alınması gereken ve gerekmeyen verilerle birlikte çalışmak güç olabilmektedir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev

Kitaptan *Bölüm 21* "Time Series Econometrics: Some Basic Concepts" ve *Bölüm 22* "Time Series Econometrics: Forecasting" okunacak.

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011