Bölüm 5

Özilinti

5.1 Özilintinin Niteliği

KDBM'nin önemli bir varsayımı, bağlanım işlevinde yer alan u_i bozuklukları arasında *"özilinti"* (autocorrelation) olmadığıdır. Ancak bu varsayım her zaman geçerli olmayabilir. Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

1. Özilintinin niteliği nedir?
2. Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
3. Varlığı nasıl anlaşılabilir?
4. Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

- Özilinti, zaman ya da uzay içerisinde dizili gözlem üyeleri arasındaki sıraya dayanan ilişkiyi anlatan bir kavramdır.
- Özilinti aynı yönlü ya da ters yönlü olabilir. Ancak genellikle aynı yönlü olarak görülür.
- Genel olarak özilinti zaman serilerinde görülen bir olgudur. Zaman serilerinde gözlemler zamana göre dizildikleri için, ardışık gözlemler arasında ilişki bulunması olasıdır.
- Yatay kesit verilerinde özilinti görülebilmesi için ise verilerin iktisadi anlamı olan bir şekilde dizilmiş olmaları gereklidir.
- Yatay kesit verilerinde görülen bu tür sıralı ilişkiye *"uzaysal özilinti"* (spatial autocorrelation) denir.

- Zaman serilerinde gözlenebilen özilintiye örnek olarak, üç aydan uzun süren bir grevin üçer aylık üretim verileri üzerindeki etkisini gösterebiliriz.
- Yatay kesit verilerindeki uzaysal özilintiye örnek olarak ise bir ailenin tüketimindeki artışın, komşusundan geri kalmak istemeyen diğer bir ailenin tüketimini de artırması verilebilir.
- Özilintiyi tanımlayabilmek için, klasik doğrusal bağlanım modelinin varsayımlarından biri olarak u_i bozukluklarının birbirlerinden bağımsız olduğunu anımsayalım:

$$E(u_i u_j) = 0 \qquad i \neq j$$

- Özilinti ise herhangi bir gözleme ait hatanın önceki gözleme ait hatadan etkilenmesi durumudur:

$$E(u_i u_j) \neq 0 \qquad i \neq j$$

- Demek ki özilinti, ikincisi birincisinin gecikmelisi olan, örnek olarak u_1,$u_2, \ldots$,u_{10} ile u_2,$u_3, \ldots$,u_{11} gibi iki dizi arasındaki ilintiden başka birşey değildir.
- $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ ve $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ gibi birbirinden farklı iki dizi arasındaki ilişkiye ise *"serisel ilinti"* (serial correlation) adı verilir.

5.1.1 Özilintinin Nedenleri

Özilintinin nedenlerinden bazıları şunlardır:

1. Süredurum etkisi
2. Dışlanan değişkenler
3. Yanlış işlev biçimi
4. Örümcek ağı olgusu
5. Gecikmeler
6. Veri dönüştürmesi
7. Durağan-dışılık

Neden 1: Süredurum etkisi
Özilintinin en önemli nedeni, iktisadi zaman serilerinde sıkça görülen *"süredurum"* (inertia) ya da ağır hareketliliktir.

- Bilindiği gibi GSYH, üretim, işsizlik, fiyat endeksleri gibi zaman serileri çevrimsel dalgalanmalar sergilerler.
- Böyle serilerin doğasında bir ivmelenme bulunur. Önemli bir gelişme oluncaya kadar sürekli bir artma ya da azalma göstermeyi sürdürürler.
- Gözlemler arasındaki süre kısa ise bu durumla daha çok karşılaşılır.

Neden 2: Dışlanan değişkenler
Eksik bir değişken ya da değişkenlerden kaynaklı bir model belirtim hatası özilintiye neden olabilir.

- Aşağıdaki iki modeli karşılaştıralım:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \\ Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + v_t \end{aligned}$$

- Eğer doğru olan model birincisi ise, ikinciyi tahmin etmek $v_t = \beta_4 X_{4t} + u_t$ durumuna yol açar.
- Bu durumda v_t hata terimi düzenli bir örüntü yansıtacaktır.
- Kalıntılar arasında gözlenen bu ilişki çoğu zaman dışlanan değişkenin modele alınmasıyla yok olur.

Neden 3: Yanlış işlev biçimi
Yanlış işlev biçimi kullanmak da değişken dışlamak gibi bir model belirtim hatasıdır ve özilintiye yol açabilir.

- X_{2t} üretim ve Y_t de marjinal maliyet olsun. Aşağıdaki iki modeli ele alalım:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{2t}^2 + u_t \\ Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + v_t \end{aligned}$$

- İkinci modeli alarak doğrusal bir ilişki varsaymak, marjinal maliyetin sistematik olarak olduğundan büyük ya da küçük tahmin edilmesine yol açar.
- Bunun nedeni, yanlış belirtimli modelde $v_t = \beta_3 X_{2t}^2 + u_t$ eşitliğinin geçerli olmasıdır.

Neden 4: Örümcek ağı olgusu
Özilinti, verilerin *"örümcek ağı olgusu"* (cobweb phenomenon) denen durumu yansıttığında da ortaya çıkar.

- Örnek olarak, tarım ürünlerinde üretim zaman aldığı için arz fiyata bir dönem gecikmeli tepki verebilir:

$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + u_t$$

- Eğer t dönemindeki fiyat düşük olursa, çiftçiler $t + 1$'de üretimi kısabilirler ve bu da fiyatların birden yükselmesine yol açabilir.
- Bu böyle sürerek örümcek ağı örüntüsüne yol açar.
- Böyle bir durumda u_t bozukluk terimi de rastsal olmaktan çıkıp düzenli bir yapı sergiler.

Neden 5: Gecikmeler
Özilintinin bir nedeni de modelde yer alan gecikme terimleridir.

- Kimi zaman bağımlı değişkenin önceki bir dönemde aldığı değer, modele açıklayıcı değişken olarak girebilir.
- Örnek olarak; tüketiciler tüketim alışkanlıklarını psikolojik, teknolojik ve kurumsal nedenlerle hemen değiştirmezler.
- Buna göre bu dönemdeki tüketim, başka etmenlerin yanı sıra bir önceki dönemin *"gecikmeli"* (lagged) tüketimine de bağlı olur:

$$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 C_{t-1} + u_t$$

- Böyle bir bağlanıma *"özbağlanım"* (autoregression) denir.
- Burada eğer gecikme terimi gözardı edilirse, ortaya çıkan hata terimi, gecikmeli tüketimin bugünkü tüketim üzerindeki etkisinden doğan düzenli bir örüntü gösterecektir.

Neden 6: Veri dönüştürmeleri
Çeşitli veri dönüştürme işlemleri de özilintiye yol açabilir.

- Birçok görgül çözümlemede verileri dönüştürmek gerekir.
- Örnek olarak, üç aylık zaman serisi verileri aylık verilerin toplanıp üçe bölünmesiyle bulunabilir.
- Bu ortalama alma işlemi ise aylık verilerdeki dalgalanmaları törpüleyerek verilerde bir düzlenme yaratır.

- Böylece üç aylık verileri gösteren çizimler aylık verilere göre daha düz olur.
- Bu düzlenme de bozukluk teriminde düzenli bir örüntüye neden olabilir.
- Bu sorun *"içdeğer biçme"* (interpolation) ve *"dışdeğer biçme"* (extrapolation) durumlarında da ortaya çıkabilir.

Neden 7: Durağan-dışılık
Zaman serilerinde sıkça karşılaşılan ve önemli bir sorun olan *"durağan-dışılık"* (non-stationarity) altında hata terimi özilintilidir.

- Bir zaman serisinin durağan olması seriye ait ortalama, varyans, kovaryans gibi çeşitli özelliklerin zamana göre değişken olmaması demektir.
- Aksi durumda seri *"durağan-dışı"* (non-stationary) olur.
- Bir bağlanım modelinde Y_t ve X_t'nin durağan-dışı olması ve bu nedenle u_t'nin de durağan-dışı olması olasıdır.
- Bu durumda hata terimi özilinti sergiler.

5.1.2 Özilintinin SEK Tahminlerine Etkisi

Birinci Derece Özbağlanım

- Özilintinin SEK tahmincileri ve bunların varyansları üzerindeki etkilerini görmek için, iki değişkenli bağlanım modeline dönelim:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Burada zaman serisi verileri kullanıldığına dikkat ediniz.
- Hata terimi ile ilgili baştaki varsayımımızı anımsayalım:

$$E(u_t u_{t+s}) \neq 0, \qquad s \neq 0$$

- Bu varsayım çok genel olduğu için, u_t'yi oluşturan yapı konusunda da bir varsayım yapmamız gerekmektedir.
- Bozukluk teriminin şöyle oluştuğunu varsayalım:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t \qquad -1 < \rho < 1$$

- Buradaki ρ terimine *"özkovaryans katsayısı"* (coefficient of autocovariance) ya da *"birinci derece özilinti katsayısı"* (first order autocorrelation coefficient) denir.

- ϵ_t ise SEK varsayımlarını sağlayan bozukluk terimidir:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ \text{var}(\epsilon_t) &= \sigma^2 \\ \text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t+s}) &= 0 \qquad s \neq 0 \end{aligned}$$

- Bu yapıya *"Markov birinci derece özbağlanımsal tasarım"* (Markov first order autoregressive scheme) adı verilir ve AR(1) ile gösterilir.

- Yukarıdaki özellikleri gösteren hata terimine mühendislikte *"beyaz gürültü"* (white noise) de denir.

- Tanımladığımız birinci derece özbağlanımsal diziyi inceleyelim:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

- Yukarıda u_t'deki değişimin iki farklı parçadan oluştuğu görülmektedir.

- Birinci parça ρu_{t-1}, düzenli bir kaymayı göstermektedir. İkinci parça olan ϵ_t ise tümüyle rastsaldır.

- Bu dizi birinci derece özbağlanımsaldır çünkü yalnızca u_t ve onun bir önceki değeri söz konusudur.

- İkinci derece özbağlanımsal tasarım ya da kısaca AR(2) tasarımı ise şöyle gösterilir:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t$$

AR(1)'in SEK Tahminlerine Etkisi

- Özilinti durumunda β'ların SEK tahminleri değişmez.

- Ancak, hata terimi AR(1) iken β_2'nin varyansı şöyle olur:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}\left[1 + 2\rho\frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2} + 2\rho^2\frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2} + \cdots + 2\rho^{n-1}\frac{x_1 x_n}{\sum x_t^2}\right]$$

- Bunu özilintinin olmadığı genel formülle karşılaştıralım:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

- Demek ki $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ formülü, bildiğimiz varyans formülüne ρ'ya dayalı bir terimin eklenmesiyle bulunmaktadır.
- Genel olarak $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ değerinin $\text{var}(\hat{\beta}_2)$'dan büyük mü yoksa küçük mü olacağı önceden bilinemez.
- Özilinti varken, SEK tahmincisi $\hat{\beta}_2$ yanında AR(1)'i dikkate alan $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ formülünü kullanmak yeterli değildir.
- $\hat{\beta}_2$ bu durumda doğrusal ve yansız olmaya devam etse de artık enaz varyanslı olmayarak EDYT özelliğini kaybeder.
- Özilinti altında *"etkin"* (efficient) tahminci, farklıserpilimsellik durumunda olduğu gibi GEK yöntemiyle bulunabilir.

AR(1) Altında EDYT Tahminci

- İki değişkenli modelde ve AR(1) süreci altında, GEK ile bulunan ve EDYT olan tahminci ve bunun varyansı şöyledir:

$$\hat{\beta}_2^{\text{GEK}} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \rho x_{t-1})(y_t - \rho y_{t-1})}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \rho x_{t-1})^2} + C$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_2^{\text{GEK}}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^{n}(x_t - \rho x_{t-1})^2} + D$$

- Buradaki C ve D terimleri, uygulamada gözardı edilebilen düzeltme terimleridir.
- Ayrıca t alt iminin 2'den n'ye kadar olduğuna dikkat ediniz.
- Demek ki GEK tahmincisi anakütledeki özilinti katsayısı ρ'yu içerirken, SEK bunu görmezden gelmektedir.
- SEK'in değil de GEK'in EDYT olmasının nedeni sezgisel olarak budur. Eğer $\rho = 0$ ise iki tahminci aynı olur.

AR(1) Altında SEK Kullanmanın Sonuçları

- Özilinti varken, $\text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ tanımı kullanılsa bile güven aralıkları $\text{var}\hat{\beta}_2^{\text{GEK}}$'e göre daha geniş olabilir.
- Demek ki özilinti göz önüne alınsa bile SEK süreci GEK'e göre anlamlı bir tahmini anlamsız gösterebilmektedir.
- SEK kullanmakla kalmayıp özilintiyi göz ardı eden sıradan $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ formülünü kullanmanın sonuçları ise daha ciddidir.
- Eğer ρ artı işaretli (u_t'ler aynı yönlü ilişki içinde) ise, kalıntı varyansı $\hat{\sigma}^2$ gerçek σ^2'yi olduğundan küçük tahmin eder.
- Aşağı doğru yanlı $\hat{\sigma}^2$ da R^2'yi olduğundan büyük bulur.
- Ayrıca $\hat{\sigma}^2$'daki yanlılık $\text{var}(\hat{\beta}_2)$'ya da aktarılır.
- Bunun sonucunda $\text{var}(\hat{\beta}_2) < \text{var}(\hat{\beta}_2)_{\text{AR1}}$ olur ve bildiğimiz t ve F sınamaları geçerliliklerini yitirir.
- Sonuç olarak, SEK tahmincileri yansız ve tutarlı olsalar da özilinti varken SEK değil GEK kullanılmalıdır.

5.2 Özilintiyi Saptamak

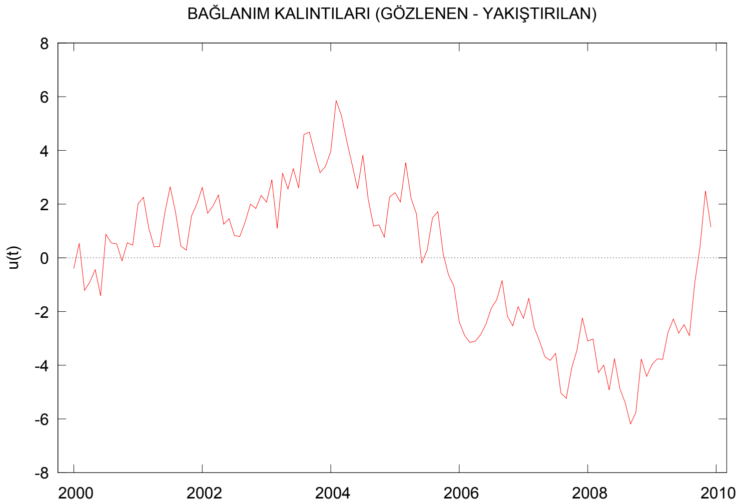
5.2.1 Çizim Yöntemi ve Dizilim Sınaması

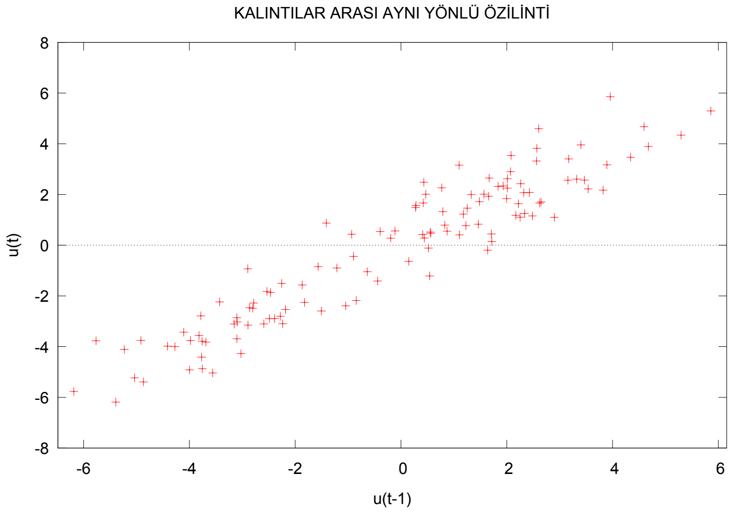
Çizim Yöntemi

- Özilintinin var olup olmadığını anlamada nitel bir yöntem olan çizim yönteminin yanı sıra çeşitli nicel sınamalardan yararlanılabilir.
- Çizim yöntemi için SEK süreci kullanılır ve elde edilen $\hat{u}_t$ kalıntıları görsel olarak incelenir.
- Tahmin edilen $\hat{u}_t$'lar her ne kadar gerçek u_t'lerle aynı şey değilse de, önemli ipuçları verebilirler.
- Böyle bir görsel inceleme yalnızca özilinti konusunda değil; farklıserpilimsellik, model yetersizliği ve model belirtim yanlılığı konularında da yararlı bilgiler sağlayabilmektedir.

Kalıntıları birkaç farklı şekilde incelemek olasıdır:

1. Öncelikli olarak kalıntılar zamana göre çizilebilir. Bu çizime *"zaman dizisi çizimi"* (time sequence plot) denir.
2. Almaşık olarak, *"ölçünlü kalıntılar"* (standardized residuals) incelenebilir. Ölçünlü kalıntılar, $\hat{u}_t$'ların tahmin edilen ölçünlü hata $\hat{\sigma}$'ya bölünmesiyle bulunur. Bunlar saf sayılar oldukları için başka bağlanımlarınkilerle karşılaştırılabilirler. Ortalamaları sıfır, varyansları da birdir.
3. Üçüncü olarak, $\hat{u}_t$'ların $\hat{u}_{t-1}$'ya göre çizimi incelenebilir. Eğer t dönemi kalıntıları $t-1$ dönemindekilerle düzenli bir ilişki sergiliyorsa, bunların rastsal olmadığı sonucu çıkar.





Dizilim Sınaması

- Kalıntıların rastsal bir sıra izleyip izlemediğini anlamak için *"dizilim"* (runs) sınamasını kullanabiliriz.
- Bu sınama, gözlemlerin içinden seçildiği dağılıma ilişkin herhangi bir varsayım yapmadığı için *"değiştirgesel-dışı"* (non-parametric) bir sınamadır.
- Bu sınamayı açıklamak için aşağıdaki kalıntı işaretleri dizilimini ele alalım:

$$(-------)(+++++++++++++)(-)(+)(---------)$$

- Gözlem sayısı burada $n = 7 + 12 + 1 + 1 + 9 = 30$'dur.
- Artı işaretli gözlem sayısı $n_1 = 13$, eksi işaretli gözlem sayısı da $n_2 = 17$'dir. Toplam dizilim sayısı ise $k = 5$'tir.
- Verilen tanımlara göre ve $n_1 > 10$ ve $n_2 > 10$ varsayımları altında ardışık kalıntılar, eğer gerçekten bağımsızlarsa, aşağıda verilen ortalama ve varyans ile normal dağılıma uyarlar:

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{2n_1n_2}{n} + 1 \\ \sigma_k^2 &= \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n)}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

- Buna göre, eğer $[E(k) - 1{,}96\sigma_k \le k \le E(k) + 1{,}96\sigma_k]$ ise rastsallık sıfır önsavı %95 güvenle reddedilmez.

5.2.2 Durbin-Watson d Sınaması

- Özilintiyi bulmak için kullanılan en yaygın sınama, Durbin ve Watson tarafından geliştirilmiş olan d sınamasıdır.
- Bu sınamanın üstünlüğü bağlanım çözümlemesi sırasında hep hesaplanan $\hat{u}_t$'lara dayanmasıdır:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=n}\hat{u}_t^2}$$

- Yukarıdaki formül, basitçe ardışık kalıntıların fark kareleri toplamının KKT'ye oranını göstermektedir.
- Fark alma sırasında bir gözlem kaybedildiği için istatistiğin payında $n - 1$ gözlem bulunduğuna dikkat ediniz.
- Gretl gibi ekonometri yazılımları bağlanım çıktıları arasında Durbin-Watson d değerini de öntanımlı olarak verir.
- Durbin-Watson d istatistiği alışık olduğumuz normal, t, χ^2 ve F dağılımlarına uymaz.
- X değerleri ile olan karmaşık bağlılığı yüzünden d'nin olasılık dağılımını türetmek zordur.

- Bu nedenle, bu sınamaya ait özilintinin olmadığı yönündeki sıfır önsavının reddedilmesine ya da reddedilmemesine götüren tek bir eşik değeri yoktur.
- Onun yerine, gözlem sayısı n ile sabit terim hariç açıklayıcı değişken sayısı k'ya bağlı bir alt sınır d_{a} ve bir üst sınır $d_{\text{ü}}$ bulunmaktadır.
- $n = \{6, \ldots, 200\}$ ve $k = \{1, \ldots, 20\}$ aralıkları için d_{a} ve $d_{\text{ü}}$ değerleri Durbin ve Watson tarafından hesaplanmış ve bir çizelge olarak yayınlanmıştır.
- Durbin-Watson d istatistiği 0 ile 4 sınırları içinde yer alır.
- Bunu göstermek için d'yi şöyle yazalım:

$$d = \frac{\sum \hat{u}_t^2 + \sum \hat{u}_{t-1}^2 - 2\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

- $\hat{u}_t^2$ ile $\hat{u}_{t-1}^2$ arasında yalnızca bir gözlemlik fark olduğu için ikisi yaklaşık olarak birbirine eşittir. Buna göre:

$$d \approx 2\left(1 - \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}\right)$$

- Şimdi, ρ'nun bir tahmincisi olarak örneklem birinci derece özilinti katsayısını şöyle tanımlayalım:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

- Tanım gereği $-1 \leq \rho \leq 1$ olduğu için $0 \leq d \leq 4$ olur.
- Hesaplanan d istatistiği 0'a yakınsa aynı yönlü, 4'e yakınsa da ters yönlü özilinti olma olasılığı yüksektir.
- Eğer $d = 2$ dolaylarında ise, özilinti olmadığı varsayılabilir.

Durbin-Watson sınamasının adımları şöyledir:

1. SEK bağlanımı bulunur.
2. Kalıntılar kullanılarak d istatistiği hesaplanır.
3. Örneklem büyüklüğü n'ye ve açıklayıcı değişken sayısı k'ya göre d_{a} ve $d_{\text{ü}}$ kritik değerleri bulunur.

4. Aşağıdaki çizelgede verilen karar kuralları uygulanır:

Çizelge: Durbin-Watson d Sınaması Karar Kuralları

Sıfır Önsavı	Karar	Durum
Aynı yönlü özilinti yok	Reddedilir	$0 < d < d_a$
Aynı yönlü özilinti yok	Karar Yok	$d_a \leq d \leq d_ü$
Özilinti yok	Reddedilmez	$d_ü < d < 4 - d_ü$
Ters yönlü özilinti yok	Karar Yok	$4 - d_ü \leq d \leq 4 - d_a$
Ters yönlü özilinti yok	Reddedilir	$4 - d_a < d < 4$

Kiplemeli d Sınaması

- Yaygın olarak kullanılan d sınamasının önemli bir aksaklığı, sonucun kimi zaman kararsızlık bölgesine düşebilmesidir.
- Ancak, çoğunlukla $d_ü$ üst sınırının yaklaşık olarak gerçek anlamlılık sınırı olduğu bulunmuştur.
- Dolayısıyla bulunan d değeri eğer kararsızlık bölgesinde olur ise, *"kiplemeli"* (modified) d sınaması karar kuralları uygulanır:

Çizelge: Kiplemeli Durbin-Watson d Sınaması Karar Kuralları

Sıfır Önsavı	Karar	Durum
$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho > 0$	α düzeyinde reddedilir	$d < d_ü$
$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho \neq 0$	$\alpha/2$ düzeyinde reddedilir	$d_ü < d < 4 - d_ü$
$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho < 0$	α düzeyinde reddedilir	$4 - d_ü < d$

Yaygın olarak kullanılan Durbin-Watson sınamasının gerisinde yatan şu üç varsayıma dikkat edilmelidir:

1. Açıklayıcı değişkenler olasılıksal-dışı olmalıdır. Diğer bir deyişle, bağlayanlara ait değerlerin tekrarlı örneklemede değişmiyor olması gereklidir.
2. u_t hataları normal dağılıma uymalıdır. Öte yandan d istatistiğinin büyük örneklemlerde ölçün normal dağılıma uyduğunu göstermek de olanaklıdır.
3. Bağımlı değişkenin gecikmelerinin açıklayıcı değişken(ler) olarak modelde bulunmaması gereklidir. Bu, sınamanın uygulanmasında son derece önemlidir.

5.2.3 Breusch-Godfrey Sınaması

Durbin-Watson'a almaşık bir diğer sınama da Breusch-Godfrey sınamasıdır. *"Lagrange çarpanı"* (Lagrange multiplier), kısaca *"LÇ"* (LM) sınaması da denen bu yöntemin özellikleri şunlardır:

- Bu sınama, açıklayıcı değişkenler arasında Y'nin gecikmeli değerlerinin olduğu durumda da kullanılabilmektedir.
- u_t bozukluk terimi p'inci dereceden bir *"hareketli ortalama"* (moving average) sürecine uysa bile uygulanabilir:

$$u_t = \epsilon_t + \lambda_1 \epsilon_{t-1} + \lambda_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \lambda_p \epsilon_{t-p}$$

- Birinci derece özilinti anlamında $p = 1$ ise, sınama Durbin m sınaması adını alır.
- BG sınamasının bir sakıncası, gecikme uzunluğu p'nin önsel olarak belirlenememesidir.

BG sınamasını açıklamak için, hata teriminin p'inci derece özbağlanımsal tasarıma göre türediğini düşünelim:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \cdots + \rho_p u_{t-p} + \epsilon_t$$

Sınama adımları aşağıdaki gibidir:

1. Bağlanım SEK ile tahmin edilip kalıntılar elde edilir.
2. $\hat{u}_t$'ların ilk modeldeki açıklayıcı değişkenler ve 1. adımdaki kalıntıların gecikmeli değerleri olan $\hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \ldots, \hat{u}_{t-p}$ ek değişkenlerine göre bağlanımı bulunur ve R^2 hesaplanır.
3. $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_p = 0$ sıfır önsavı ve büyük örneklem varsayımı altında şu geçerlidir:

$$(n - p) \cdot R^2 \sim \chi^2_p$$

4. Bulunan değer kritik χ^2 değerini aşıyorsa H_0 reddedilir.

5.3 Özilintiyi Düzeltmek

- Özilintinin yol açabildiği ciddi sonuçları düşünüldüğünde, sorun var olduğu zaman düzeltici bazı önlemler almanın gerekli olduğu da açıktır.
- Bozukluk terimi u_t gözlenemediği için, özilintinin niteliğini anlamak çeşitli uygulamalı yöntemlere konu olur.
- Genel olarak u_t'nin birinci derece özbağlanımsal tasarım AR(1)'e uyduğu varsayılır:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

- Burada $|\rho| < 1$'dir. ϵ_t ise SEK varsayımlarına uymaktadır.
- Sorun çoğu zaman GEK yöntemi yardımı ile çözülebilse de çözümde izlenecek yol ρ'nun bilinip bilinmediğine bağlı olarak değişir.

5.3.1 ρ Biliniyorsa

- ρ'nun değerinin bilindiği durumda, AR(1) sorunu GEK yöntemi ile çözülebilir. İki değişkenli modele dönelim:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Yukarıdaki denklemin $t-1$ dönemi için yazılmış şeklini ρ katsayısı ile çarpalım:

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_1 + \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

- İkinci denklemi birinciden çıkartırsak şunu elde ederiz:

$$\begin{array}{ccccccc} (Y_t - \rho Y_{t-1}) = & \beta_1(1-\rho) & + & \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) & + & (u_t - \rho u_{t-1}) \\ Y_t^* = & \beta_1^* & + & \beta_2 X_t^* & + & \epsilon_t \end{array}$$

- Bu denkleme *"genellemeli fark denklemi"* (generalized difference equation) adı verilir.
- ϵ_t tüm SEK varsayımlarını karşıladığı için, dönüştürmeli Y^* ve X^* değişkenlerine SEK uygulanarak EDYT özelliği gösteren tahminciler elde edilebilir.

Prais-Winsten Dönüştürmesi

- Gösterilen fark denklemi, tüm gözlemlerin kendilerinden bir önceki değerlerinden ρ oranı kadarını çıkartmakla bulunur.
- Ancak bu işlem sırasında ilk gözlem kaybedilmektedir.
- Bu kaybı engellemek amacıyla Prais-Winsten dönüşümü uygulanabilir.
- Buna göre Y ve X'in ilk değerleri şöyle dönüştürülür:

$$Y_1\sqrt{1-\rho^2} \qquad \text{ve} \qquad X_1\sqrt{1-\rho^2}$$

- Bu dönüştürmenin özellikle küçük örneklemlerde bağlanım sonuçlarını etkileyeceğine dikkat edilmelidir.

Birinci Fark Yöntemi

- ρ değiştirgesi 0 ile ±1 aralığında yer aldığına göre, $+1$ ve -1 uç değerlerini tartışmakta yarar vardır.
- Eğer $\rho = +1$ ise genellemeli fark denklemi *"birinci fark"* (first-difference) denklemine şöyle indirgenir:

$$\begin{aligned}(Y_t - Y_{t-1}) &= \beta_2(X_t - X_{t-1}) + (u_t - u_{t-1}) \\ \Delta Y_t &= \beta_2 \Delta X_t + \epsilon_t\end{aligned}$$

- Yukarıdaki denklemde sabit terim olmadığına dikkat ediniz.
- Almaşık olarak, içinde genel eğilim değişkeni t olan modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 t + u_t$$

- Bu durumda birinci fark denklemi şöyle olur:

$$\Delta Y_t = \beta_2 \Delta X_t + \beta_3 + \epsilon_t$$

- Burada β_3 sabit terimi, tüm değişkenlerin etkisi göz önüne alındıktan sonra Y'nin zaman içindeki eğilimini gösterir.
- İktisadi serilerde çok sık görülmeyen ters yönlü tam özilinti durumunu ele alalım.

- Eğer $\rho = -1$ olursa, genellemeli fark denklemi şu olur:

$$\begin{aligned}(Y_t + Y_{t-1}) &= 2\beta_1 + \beta_2(X_t + X_{t-1}) + \epsilon_t \\ \frac{(Y_t + Y_{t-1})}{2} &= \beta_1 + \beta_2 \frac{X_t + X_{t-1}}{2} + \frac{\epsilon_t}{2}\end{aligned}$$

- Yukarıdaki model bir hareketli ortalamanın diğerine göre bağlanımını bulduğu için, *"iki dönemli hareketli ortalama"* (two period moving average) bağlanımı diye adlandırılır.

Berenblutt-Webb Sınaması

- Birinci fark dönüştürmesi uygulamada yaygındır. Ancak kullanılabilmesi için önce $\rho = +1$ varsayımı sınanmalıdır.
- Bu doğrultuda, aşağıda gösterilen Berenblutt-Webb g istatistiği kullanılabilir:

$$g = \sum_{t=2}^{n} \hat{e}_t^2 / \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2$$

- $\hat{u}_t$ burada ilk modeldeki SEK kalıntılarını göstermektedir.
- $\hat{e}_t$ ise $\rho = 1$ iken (sıfır noktasından geçen) birinci fark bağlanımından gelen kalıntılardır.
- Özgün modelde sabit terim bulunması şartıyla, g istatistiği sınanırken Durbin-Watson çizelgeleri kullanılır.
- Sıfır önsavı ise Durbin-Watson'ınkinin tersine $\rho = 1$'dir.

5.3.2 ρ Bilinmiyorsa

d İstatistiğini Kullanmak

- ρ'nun bilinmesi ender bir durum olduğu için, uygulamada genellikle tahmin yoluna gidilir.
- Eğer ρ bilinmiyorsa, bu katsayıyı tahmin etmenin bir yolu Durbin-Watson sınama istatistiği d'yi kullanmaktır.
- Daha önce saptamış olduğumuz şu ilişkiyi anımsayalım:

$$d \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

- Buna göre aşağıdaki yaklaşıklık geçerlidir:

$$\hat{\rho} \approx 1 - (d/2)$$

- Demek ki d istatistiği bize ρ'yu tahmin etmeye yönelik bir başparmak hesabı sunmaktadır.
- Yukarıdaki ilişkinin yaklaşık olduğu ve özellikle de küçük örneklemler için doğru olmayabileceğine dikkat edilmelidir.

İki Aşamalı Durbin Yöntemi

İki Aşamalı Durbin yöntemini açıklamak için genellemeli fark denklemini şu şekilde yazalım:

$$Y_t = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2 X_t - \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$$

Durbin, ρ'yu tahmin etmek için şu iki adımlı süreci önermiştir:

1. Yukarıdaki çoklu bağlanım modeli hesaplanır ve Y_{t-1}'in katsayısı, tahmin edilen $\hat{\rho}$ olarak ele alınır. Bu değer ρ'nun yanlı olmakla birlikte tutarlı bir tahminidir.
2. $\hat{\rho}$ bulunduktan sonra ise GEK yöntemi uygulanır. Diğer bir deyişle, $Y_t^* = (Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1})$ ve $X_t^* = (X_t - \hat{\rho}X_{t-1})$ dönüştürmeleri yapılır ve SEK bağlanımı hesaplanır.

Cochrane-Orcutt Süreci

- Kalıntıları kullanarak ρ'yu tahmin etmenin uygulamada sıklıkla yararlanılan bir yolu, Cochrane-Orcutt sürecidir.
- Bu *"yinelemesel"* (iterative) hesaplama yöntemi istatistikçi Cochrane ve Orcutt tarafından 1949 yılında bulunmuştur.
- İşlemi açıklamak için şu iki değişkenli modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

- Bozukluk terimi u_t'nin aşağıdaki AR(1) tasarımından türediğini de ayrıca varsayalım:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$$

(... devam)

Cochrane-Orcutt sürecinin adımları aşağıdaki gibidir:

1. Bağlanım SEK ile tahmin edilip kalıntılar elde edilir.
2. $\hat{u}_t$ kalıntıları kullanılarak şu bağlanım hesaplanır:

$$u_t = \hat{\rho}\hat{u}_{t-1} + v_t$$

3. $\hat{\rho}$ kullanılarak genellemeli fark bağlanımı elde edilir:

$$\begin{array}{ccccccc} (Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) & = & \beta_1(1-\hat{\rho}) & + & \beta_2(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) & + & (u_t - \hat{\rho}u_{t-1}) \\ Y_t^* & = & \beta_1^* & + & \beta_2^* X_t^* & + & \epsilon_t^* \end{array}$$

4. $\hat{\rho}$'nın ρ'nun en iyi tahmini olduğu önsel olarak bilinemediği için, $\hat{\beta}_1^*$ ve $\hat{\beta}_2^*$ değerlerinden yeni bir kalıntı yöneyi bulunur:

$$u_t^{**} = Y_t - \hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* X_t$$

5. Yeni u_t^{**}'lar yardımı ile ρ'nun ikinci tur tahmini $\hat{\hat{\rho}}$ bulunur:

$$u_t^{**} = \hat{\hat{\rho}}\hat{u}_{t-1}^{**} + w_t$$

6. ρ'nun yinelemesel tahminleri arasındaki fark yeterince küçülene kadar bu işleme devam edilir.

Diğer Yöntemler

- $\hat{\rho}$'yı bulmak için kullanılan diğer bazı yöntemler şunlardır:

  İki adımlı Cochrane-Orcutt süreci Hildreth-Lu arama süreci Doğrusal-dışı EO yöntemi

- Kavuşmazsal ya da büyük örneklemlerde bu yöntemler aşağı yukarı benzer sonuçlar vermektedir.
- Sonlu ya da küçük örneklemlerde ise elde edilen sonuçlar seçilen yönteme göre önemli değişiklikler gösterebilir.
- Uygulamada en yaygın kullanılan yöntem ise yinelemesel Cochrane-Orcutt sürecidir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 12* “Autocorrelation” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Ekonometrik Modelleme

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011