Bölüm 3

Çoklueşdoğrusallık

3.1 Çoklueşdoğrusallığın Niteliği

3.1.1 Çoklueşdoğrusallık Kavramı

Klasik doğrusal bağlanım modelinin (KDBM) varsayımlarından biri, modele katılan değişkenler arasında *"çoklueşdoğrusallık"* (multicollinearity) olmadığı yönündedir. Gözlem sayısının açıklayıcı değişken sayısından çok olduğu ve açıklayıcıların yeterince değişkenlik gösterdiği varsayımları da çoklueşdoğrusallığın olmadığı varsayımının tamamlayıcılarıdır. Bu bölümde şu sorulara yanıt arayacağız:

1. Çoklueşdoğrusallığın niteliği nedir?
2. Çoklueşdoğrusallık gerçekten bir sorun mudur?
3. Uygulamada doğurduğu sonuçlar nelerdir?
4. Varlığı nasıl anlaşılabilir?
5. Düzeltmek için ne gibi önlemler alınabilir?

- Eşdoğrusallık kavramını ilk kez 1934 yılında Ragnar Frisch öne sürmüştür.
- Önceleri bu terim bir bağlanım modelinin tüm ya da bazı açıklayıcı değişkenleri arasında *"kusursuz"* (perfect) ya da *"tam"* (exact) bir doğrusal ilişki olduğu anlamına geliyordu.
- Aşağıdaki örneği ele alalım:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k = 0$$

- Yukarıdaki eşitlikte yer alan herhangi bir X, örnek olarak X_2, diğerlerinin doğrusal işlevi olarak gösterilebilir:

$$X_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}X_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}X_3 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_2}X_k$$

- Diğer bir deyişle bu örnekteki herhangi bir X değişkenini diğerlerinin doğrusal bir bileşiminden türetmek olasıdır.
- Bugün çoklueşdoğrusallık hem tam çoklueşdoğrusallığı hem de X değişkenlerinin genel olarak birbirleriyle ilişkili olduklarını gösteren daha geniş bir anlam içermektedir:

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k + v_i = 0$$

- v_i burada olasılıksal hata terimidir.
- Örnek olarak X_2 şu şekilde yazılabilir:

$$X_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}X_1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}X_3 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_2}X_k - \frac{1}{\lambda_2}v_i$$

- Buna göre X_2, diğer X değişkenlerinin kusursuz olmayan bir doğrusal bileşimidir.
- Tanımladığımız şekliyle çoklueşdoğrusallık, yalnızca X'ler arasındaki doğrusal ilişkileri anlatmaktadır.
- Örnek olarak aşağıdaki *"çokterimli"* (polynomial) bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + u_i$$

- Burada X_i, X_i^2 ve X_i^3'ün işlevsel ilişki içinde olduğu açıktır.
- Ancak bu ilişki doğrusal olmadığı için çoklueşdoğrusallığın olmadığı varsayımını çiğnemez.
- Uygulamada ise X_i, X_i^2, ve X_i^3 arasında hesaplanan ilinti katsayısı yüksek çıkacak ve bu da anakütle katsayılarının tahmin edilmesini güçleştirecektir.

- Tam ve tamdan az eşdoğrusallık arasındaki farkı daha iyi görebilmek için, aşağıdaki varsayımsal verileri inceleyelim:

X_1	X_2	X_2^*
10	50	52
15	75	75
18	90	97
24	120	129
30	150	152

- Bu örnekte $X_2 = 5X_1$ olduğu için, X_1 ile X_2 arasında tam eşdoğrusallık bulunmaktadır.
- Diğer bir deyişle ilinti katsayısı $r_{12} = 1$'dir.
- X_2^* değişkeni ise X_2'ye rastsal sayılar çizelgesinden alınan $\{2, 0, 7, 9, 2\}$ sayılarının eklenmesiyle bulunmuştur.
- X_1 ile X_2^* arasında bir tam eşdoğrusallık olmamakla birlikte çok güçlü bir ilinti ($r_{12}^* = 0{,}9959$) bulunmaktadır.

Çoklueşdoğrusallığın Nedenleri

Çoklueşdoğrusallık şu etmenlere bağlı olabilir:

1. *Veri derleme yöntemi:* Örnek olarak, bir X'in anakütlede aldığı değerlerin sınırlı bir aralığından örneklem almak.
2. *Anakütle kısıtlamaları:* Örnek olarak, elektrik tüketiminin gelir ve konut büyüklüğüne göre bağlanımında görülen yüksek gelirli ailelerin büyük evlerde oturmaları durumu.
3. *Model kurma hatası:* Örnek olarak, bir X değişkeninin gözlenen aralığı darken bağlanım modeline X^2 gibi terimler eklemek.
4. *Aşırı belirtimli model:* Modelin gözlem sayısına göre çok fazla sayıda değişken içermesi.

3.1.2 Çoklueşdoğrusallık Varken Tahmin

Tam Eşdoğrusallık

- Tam çoklueşdoğrusallık durumunda bağlanım katsayıları belirsizdir.
- Ayrıca $\hat{\beta}$ katsayılarının ölçünlü hataları da sonsuz olur.

- Bunu görebilmek için üç değişkenli modeli sapmalar biçiminde yazalım:

$$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} + u_i$$

- Tahmin edilen β değiştirgeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_2 &= \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \\
\hat{\beta}_3 &= \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}
\end{aligned}$$

- Şimdi, $X_{3i} = \lambda X_{2i}$ diyelim ve $\lambda \neq 0$ olsun.
- Bu durumda tahmin edilen değiştirgeler şuna indirgenir:

$$\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_3 = \hat{\beta} = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i})(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - \lambda^2 (\sum x_{2i}^2)^2} = \frac{0}{0}$$

- Yukarıdaki gösterimin belirsiz olmasının nedeni, X_{2i} ile X_{3i}'nin tam eşdoğrusallıktan dolayı birbirlerinden ayrılamamasıdır.
- X_{2i} değişince X_{3i} de λ çarpanıyla değişir, sabit tutulamaz.
- Uygulamada bu durum yıkıcı olur çünkü bütün amaç zaten X_{2i} ve X_{3i}'nin Y_i üzerindeki kısmi etkilerini ayrıştırmaktır.
- Tam çoklueşdoğrusallığın yol açtığı belirsizlik sorununu görmek için $X_{3i} = \lambda X_{2i}$ özdeşliğini modele yerleştirelim:

$$\begin{aligned}
y_i &= \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 (\lambda x_{2i}) + u_i \\
&= (\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3) x_{2i} + u_i \\
&= \hat{\alpha} x_{2i} + u_i
\end{aligned}$$

- Demek ki α değeri için tek bir tahmin yapılabilirken, β_2 ile β_3 için ayrı ayrı iki tahmin yapılamaz:

$$\hat{\alpha} = (\hat{\beta}_2 + \lambda \hat{\beta}_3) \qquad \hat{\beta}_2 = \hat{\alpha} - \lambda \hat{\beta}_3$$

Yüksek Eşdoğrusallık

- Tam çoklueşdoğrusallık uç bir durumdur. İktisadi verilerde genellikle tam doğrusal ilişkiye rastlanmaz.
- Yüksek çoklueşdoğrusallık durumu için şu ilişkiye bakalım:

$$x_{3i} = \lambda x_{2i} + v_i$$

- Burada $\lambda \neq 0$'dır. v_i ise x_{2i}'den bağımsız ($\sum x_{2i}v_i = 0$) bir olasılıksal hata terimidir.
- Yukarıda gösterilen yüksek çoklueşdoğrusallık durumunda, β_2 ve β_3 katsayılarının tahmin edilmesi olanaklıdır:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i} + \sum y_i v_i)(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum x_{2i}^2)^2}$$

- Yukarıdakine benzer bir gösterim β_3 için de çıkarılabilir.
- Demek ki yüksek çoklueşdoğrusallık durumunda tahmin yapılmasını engelleyen bir durum yoktur.

3.2 Çoklueşdoğrusallığın Sonuçları

3.2.1 Kuramsal Sonuçlar

- Çoklueşdoğrusallık tama yakın olsa bile SEK tahmincileri yansız ve enaz varyanslıdırlar.
- Diğer bir deyişle, çoklueşdoğrusallık durumunda da SEK tahmincileri EDYT'dirler.
- Çoklueşdoğrusallığın tek etkisi, ölçünlü sapması düşük tahminler yapmayı güçleştirmesidir.
- Kuramsal anlamda (1) çoklueşdoğrusallık, (2) az sayıda gözlem ve (3) yüksek varyanslı bağımsız değişkenler kavramları aynı sorunun üç farklı şekilde dile getirilmesidir.
- Goldberger gibi bazı ekonometriciler, örneklem büyüklüğü konusunu vurgulamak için çoklueşdoğrusallık terimi yerine *"mikrosayıdalık"* (micronumerosity) sözcüğünü yeğlerler.
- Çoklueşdoğrusallık temelde bir örneklem ya da örneklem bağlanımı olgusudur.
- Diğer bir deyişle, X değişkenleri anakütlede doğrusal ilişkili olmasalar bile eldeki örneklemde doğrusal ilişkili olabilirler.
- ABİ'yi tahmin etmek üzere kullanılan bir örneklemdeki X'ler yüksek bir çoklueşdoğrusallık gösterir ise bunların Y üzerindeki tekil etkilerini ayırmak zorlaşır.
- Kısaca eldeki örneklem tüm X'leri çözümlemeye katmaya yetecek kadar zengin olmayabilir.
- Örneklemin yeterliliği sorununa örnek olarak aşağıda verilen tüketim-gelir örneğini ele alalım:

$$\text{Tüketim} = \beta_1 + \beta_2\text{Gelir} + \beta_3\text{Servet} + u_i$$

- İktisat kuramına göre gelir ve servet, tüketim harcamalarını açıklamada önemli iki değişkendir.
- Ancak veriler derlendiğinde bu iki değişken tam olmasa bile yüksek ilişkili çıkar.

- Diğer bir deyişle, gelir ve servetin tüketim harcamaları üzerindeki etkilerini örneklemde ayırmak zor olabilir.
- Bu ayrımı yapabilmek için ise geliri az ama serveti çok olan ve geliri çok ama serveti az olan kimselerin yeterli sayıda örneklem gözlemini edinebilmek gereklidir.
- Kesit verilerinde bunu sağlamak mümkün olabilse de toplu zaman serilerinde buna erişmek neredeyse imkansızlaşır.

3.2.2 Uygulamaya İlişkin Sonuçlar

Tama yakın çoklueşdoğrusallık durumlarında, uygulamada şu sonuçlarla karşılaşılabilir:

- SEK tahmincileri, EDYT olmalarına karşı yüksek varyans ve kovaryanslıdırlar.
- Yüksek varyanslar nedeniyle güven aralıkları geniş olma eğilimindedir.
- Geniş güven aralıkları ise katsayı tahminlerine ilişkin sıfır önsavlarının reddedilememesine ve birçok t oranının istatistiksel olarak anlamlı olmamasına yol açar.
- Bir ya da daha çok katsayının anlamlı olmamasına karşın bütünün yakışma iyiliğinin ölçüsü R^2 yüksek olabilir.
- SEK tahminleri *"sağlam"* (robust) olmayabilirler. Diğer bir deyişle, verilerdeki küçük değişmelere duyarlı olabilirler.

Yüksek Varyans ve Kovaryans Sorunu

- Yüksek varyans ve kovaryans sorununu görebilmek için üçlü bağlanıma ait şu ilişkileri anımsayalım:

$$
\begin{aligned}
\text{var}(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1-r_{23}^2)} \\
\text{var}(\hat{\beta}_3) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1-r_{23}^2)} \\
\text{cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3) &= \frac{-r_{23}\sigma^2}{(1-r_{23}^2)\sqrt{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2}}
\end{aligned}
$$

- Buradaki r_{23} terimi X_2 ile X_3 arasındaki ilinti katsayısıdır.
- Eşdoğrusallık düzeyi yükselirken, diğer bir deyişle r_{23} 1'e yaklaşırken, iki tahmincinin varyanslarının artarak sonsuza yaklaştığına dikkat ediniz.
- Çoklueşdoğrusallık altında varyans ve kovaryansların büyüme hızını görmek için *"varyans şişme çarpanı"* (variance inflating factor) kavramından yararlanılabilir:

$$\text{VŞÇ} = \frac{1}{(1 - r_{23}^2)}$$

- Yukarıdaki formüle göre r_{23} 1'e yaklaşırken VŞÇ değeri de sonsuza yakınsamaktadır.
- VŞÇ tanımı kullanılarak $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$'nın varyansları şöyle gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}\text{VŞÇ} \\ \text{var}(\hat{\beta}_3) &= \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2}\text{VŞÇ} \end{aligned}$$

- r_{23} artarken varyans ve kovaryansların büyümelerine ilişkin bir örnek olarak, şu çizelgeyi inceleyelim:

Çizelge: r_{23}'teki Artışın Etkisi

r_{23} Değeri	VŞÇ	var($\hat{\beta}_2$)	cov($\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$)
0,00	1,00	$\times$ 1	0
0,50	1,33	$\times$ 1,33	$\times$ 0,67
0,70	1,96	$\times$ 1,96	$\times$ 1,37
0,80	2,78	$\times$ 2,78	$\times$ 2,22
0,90	5,76	$\times$ 5,76	$\times$ 4,73
0,95	10,26	$\times$ 10,26	$\times$ 9,74
0,97	16,92	$\times$ 16,92	$\times$ 16,41
0,99	50,25	$\times$ 50,25	$\times$ 49,75
0,995	100,00	$\times$ 100,00	$\times$ 99,50
0,999	500,00	$\times$ 500,00	$\times$ 499,50

- Çizelgede görüldüğü gibi, yüksek bir ölçünlü hata anakütle katsayılarının güven aralıklarının geniş olmasına neden olmaktadır.
- Örnek olarak $r_{23} = 0{,}95$'ken β_2'nin güven aralığı da $r_{23} = 0$ durumuna oranla $\sqrt{10{,}26}$ ya da yaklaşık 3 kat büyüktür.

- Ayrıca, tahmin edilen ölçünlü hatalardaki artış t değerlerini de küçültmektedir.
- Bu yüzden anakütleye ait gerçek katsayının sıfır olduğuna ilişkin varsayımlar daha az reddedilir.
- Son olarak, katsayılar istatistiksel olarak anlamlı olmasa bile kovaryansın yüksek olmasından dolayı R^2 de yüksek, örnek olarak 0,90'ın üstünde olabilir.
- Demek ki anlamlı olmayan t değerleriyle birlikte görülen yüksek bir R^2, çoklueşdoğrusallığın belirtilerinden biridir.

Küçük Değişmelere Duyarlılık Sorunu

- Çoklueşdoğrusallık durumunda, bağlanım tahminleri ve bunların ölçünlü hataları verilerdeki küçük değişmelere yüksek duyarlılık gösterirler.
- Bunu görmek için şu iki varsayımsal veri setine bakalım:

Y	X_2	X_3
1	2	4
2	0	2
3	4	12
4	6	0
5	8	16

Y	X_2	X_3
1	2	4
2	0	2
3	4	0
4	6	12
5	8	16

- İki veri seti arasındaki tek fark X_3'ün üçüncü ve dördüncü gözlemlerinin yer değiştirmiş olmasıdır.
- Birinci veri setine dayanarak şu sonuçlar bulunur:

$$\begin{array}{llll}
\hat{Y}_i = & 1{,}1939 & +\,0{,}4463\,X_{2i} & +\,0{,}0030\,X_{3i} \\
\text{öh} & (0{,}7737) & (0{,}1848) & (0{,}0851) \\
t & (1{,}5431) & (2{,}4151) & (0{,}0358) \quad R^2 = 0{,}8101 \\
r_{23} = & 0{,}5523 & & \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0{,}0087
\end{array}$$

- İkinci veri seti ise aşağıdaki bağlanım bulgularını verir:

$$\begin{array}{llll}
\hat{Y}_i = & 1{,}2108 & +\,0{,}4014\,X_{2i} & +\,0{,}0270\,X_{3i} \\
\text{öh} & (0{,}7480) & (0{,}2721) & (0{,}1252) \\
t & (1{,}6187) & (1{,}4752) & (0{,}2158) \quad R^2 = 0{,}8143 \\
r_{23} = & 0{,}8285 & & \text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0{,}0282
\end{array}$$

- Görüldüğü gibi sonuçlar önemli farklılıklar sergilemektedir.

3.2.3 Açıklayıcı Örnek

- Çoklueşdoğrusallığa bir diğer örnek olarak, Türkiye'nin farklı illerinde faaliyet gösteren şehirlerarası otobüs firma sayılarını inceleyen aşağıdaki modeli ele alalım.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada
  Y ilde faaliyet gösteren otobüs firma sayısını (adet),
  $X2$ ildeki toplam otomobil sayısı (bin adet),
  $X3$ ise ildeki yetişkin nüfusu (milyon kişi)
  göstermektedir.

- *Dikkat:* İldeki nüfus ile otomobil sayısı arasında yüksek bir eşdoğrusallık gözleneceği açıktır.

- Otobüs firmalarının otomobil sayıları ve nüfus ile olan ilişkisinin doğrusal olduğunu varsayarsak şunu buluruz:

$$\begin{array}{llll} \hat{Y}_i = 26{,}6672 & + 0{,}1859\ X_{2i} & - 1{,}0990\ X_{3i} & \\ \text{öh} \quad (3{,}7763) & (0{,}0693) & (14{,}5375) & \\ t \quad (7{,}0617) & (2{,}6808) & (-0{,}0756) & R^2 = 0{,}7455 \end{array}$$

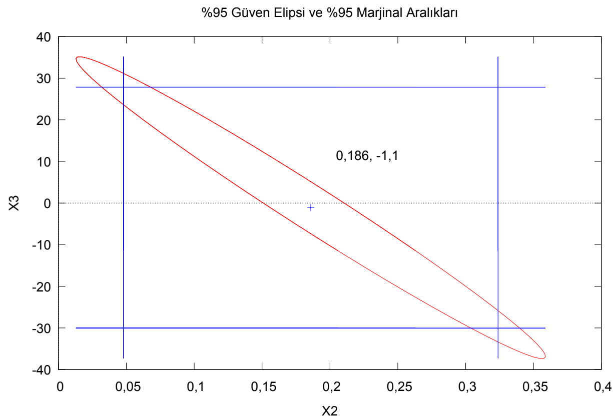
- Sonuçlar, otomobiller ve nüfusun birlikte firma sayılarındaki değişimin yaklaşık %75'ini açıkladığını göstermektedir.

- Diğer yandan, nüfusun eğim katsayısı istatistiksel olarak anlamlı değildir ve üstelik işareti de yanlıştır.

- Ayrıca, $\beta_2 = \beta_3 = 0$ önsavını sınamak için bir ortak güven aralığı belirlendiğinde bu önsav reddedilmez.

- Bunu görmek için bildik F sınamasına başvurulabilir.

- F sınaması yerine X_2 ile X_3'ün güven elipsinin 0 noktasını içerip içermediğine de bakılabilir.



- Güven elipsinin doğruyu andıran şeklinin X_2 ile X_3 arasında tama yakın bir eşdoğrusallığı gösterdiğine dikkat ediniz.

- Çözümlemeyi bir adım ileriye götürür ve X_3'ün X_2'ye göre bağlanımını hesaplarsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{array}{llll} \hat{X}_{3i} = & 0{,}1620 & +\,0{,}0047\ X_{2i} & \\ \text{öh} & (0{,}0228) & (9{,}25e\text{-}05) & \\ t & (7{,}0913) & (50{,}7795) & r^2 = 0{,}9703 \end{array}$$

- Buna göre X_3 ile X_2 arasında oldukça yüksek bir eşdoğrusallık bulunmaktadır.

- Ayrıca Y'nin X_2 ve X_3'e göre ayrı ayrı ikili bağlanımlarını alacak olursak, eğim katsayılarının işaretlerinin doğru ve anlamlılık düzeylerinin de yüksek olduğunu görürüz.

- Bu da gösterir ki yüksek çoklueşdoğrusallık gösteren X değişkenlerinden birini modelden çıkartmak, çoğu zaman diğer(ler)inin istatistiksel olarak anlamlı çıkmasını sağlar.

3.3 Çoklueşdoğrusallığı Saptamak ve Düzeltmek

3.3.1 Var Olup Olmadığını Anlamak

Bir bağlanımda çoklueşdoğrusallığın varlığını anlama konusu ile ilgili olarak şu noktalara dikkat edilmelidir:

- Çoklueşdoğrusallık nitelik değil nicelik sorunudur. Anlamlı bir ayrım çoklueşdoğrusallığın çeşitli dereceleri arasında yapılmalıdır.
- Çoklueşdoğrusallık örneklemin bir özelliği olduğu için çoklueşdoğrusallığa ilişkin bir sınama yapılamaz. Ancak derecesi ölçülebilir.
- Çoklueşdoğrusallığın var olup olmadığını anlamak ve eğer varsa derecesini ölçmek için tek bir yöntem yoktur. Bunun yerine izlenebilecek birkaç gevşek kural vardır.

Çoklueşdoğrusallığın var olup olmadığını anlamak için kural olarak yararlanılabilecek bazı belirtiler şunlardır:

1. Yüksek R^2'ye karşı anlamlı olmayan t oranları
2. Değişken çiftleri arasında yüksek ilinti
3. Yüksek dereceli kısmi ilintilerin yüksek olması
4. Yardımcı bağlanımlarda görülen güçlü ilişkiler
5. Düşük özdeğerler ya da yüksek koşul endeksi değeri
6. Yüksek varyans şişme çarpanları

Kural 1: Yüksek R^2'ye karşı anlamlı olmayan t oranları
Kısmi eğim katsayıları tekil olarak sıfırdan farklı değilken R^2 değerinin yüksek (örneğin 0,8 ve üzeri) bulunması.

- Bu klasik belirtinin kötü yanı aşırı güçlü olmasıdır.
- Diğer bir deyişle, bu tanı ancak X'lerin Y üzerindeki tüm etkileri birbirinden ayırt edilemeyecek noktadaysa çoklueşdoğrusallığı zararlı sayar.
- Öyleyse bu durum çoklueşdoğrusallığın varlığı için yeterli ama gerekli değildir.

Kural 2: Değişken çiftleri arasında yüksek ilinti
İki açıklayıcı değişken arasındaki ilinti katsayısının 0,8 gibi yüksek bir değer olması.

- Bu ölçütteki sorun ise yalnızca sıfırıncı dereceden ilintilere bakmanın tek başına yeterli olmamasıdır.
- İkiden fazla açıklayıcı değişken olması durumunda, basit ilintiler tekil olarak düşük (örneğin 0,5 ve altı) olsa bile çoklueşdoğrusallık ciddi derecede yüksek olabilir.

Kural 3: Yüksek dereceli kısmi ilintiler
Sıfırıncı dereceden ilintilere güven sorunu nedeniyle bakılan yüksek dereceli kısmi ilinti katsayılarının yüksek çıkması.

- Örnek olarak Y'nin X_2, X_3, X_4'e göre bağlanımında yüksek bir $R^2_{1.234}$ ama düşük $r^2_{12.34}$, $r^2_{13.24}$, $r^2_{14.23}$ değerleri bulmak.
- Böyle bir durum; X_2, X_3 ve X_4'ün kendi aralarında yüksek ilintili olduğu ve dolayısıyla bunlardan en az birinin gereksiz olduğu izlenimini verir.
- Çoklueşdoğrusallık bir ya da daha çok değişkenin diğer değişkenlerin tam ya da tama yakın bir doğrusal bileşimi demek olduğu için, çok karmaşık şekillerde oluşabilir.
- Dolayısıyla kısmi ilintileri incelemek yararlıdır ama bu da yanılmaz bir gösterge değildir.

Kural 4: Yardımcı bağlanımlarda görülen güçlü ilişkiler
Hangi X'in diğer X'ler ile ilişkili olduğunu bulmak amacıyla her bir X_i değişkeninin diğerlerine göre bağlanımını tahmin etmek ve buna karşılık gelen R^2_i değerini hesaplamak.

- Bu bağlanımlara *"yardımcı"* (auxiliary) bağlanım denir.
- Örnek olarak, $X_{2i} = a_1 + a_3X_{3i} + a_4X_{4i} + \cdots + a_kX_{ki} + u_i$ bağlanımından $R^2_{X_2}$ elde edilir.
- Daha sonra (k-2) ve (n-k+1) sd ile F dağılımına uyan şu istatistik hesaplanır:

$$F_i = \frac{R^2_{x_i.x_2x_3\ldots x_k}/(k-2)}{(1-R^2_{x_i.x_2x_3\ldots x_k})/(n-k+1)}$$

- Bulunan F_i eğer kritik değeri aşıyorsa, X_{2i}'nin diğer X'lerle çoklueşdoğrusal olduğu önsavı reddedilmez.
- Yardımcı bağlanım yönteminde eğer hesaplanan bir F_i anlamlıysa, ilgili X_i'nin çıkartılıp çıkartılmayacağına ayrıca karar vermek gereklidir.
- Çok sayıda karmaşık doğrusal ilişki varsa karşılıklı ilişkileri saptamak güç olacağından, bu yöntem pek yararlı olmaz.
- Bütün R_i^2'leri tek tek sınamaya almaşık olarak *"Klein'ın başparmak kuralı"* (Klein's rule of thumb) da uygulanabilir.
- Bu kurala göre bir yardımcı bağlanımdan elde edilen R^2 bütünün R^2'sinden büyükse, çoklueşdoğrusallık dikkate alınmaya değecek kadar yüksek demektir.
- Diğer kurallar gibi bu kural da dikkatli kullanılmalıdır.

Kural 5: Düşük özdeğerler ya da yüksek koşul endeksi değeri
Doğrusala yakın bağımlılıkların bir işareti olarak bir değişkene ait *"özdeğer"* (eigen value) büyüklüğünün düşük olması.

- Ekonometri yazılımları ile kolayca bulunabilen özdeğerler kullanılarak *"koşul sayısı"* (condition number) k ve *"koşul endeksi"* (condition index) KE değerleri şöyle hesaplanır:

$$k = \frac{\text{En Yüksek Özdeğer}}{\text{En Düşük Özdeğer}}, \qquad KE = \sqrt{k}$$

- Çoklueşdoğrusallık, k eğer 100 ile 1000 arasındaysa orta ya da güçlü derecededir. Eğer 1000'i aşıyorsa da ciddidir.
- Almaşık olarak, çoklueşdoğrusallık eğer KE 10 ile 30 arasındaysa orta ya da güçlüdür. 30'u aşıyorsa da ciddidir.
- Bu gevşek kural da diğerleri gibi dikkatli kullanılmalıdır.

Kural 6: Yüksek varyans şişme çarpanları
X_i'nin diğer değişkenlerle ilişkisi artarken *"varyans şişme çarpanı"* (variance inflation factor) ya da kısaca *"VŞÇ"* (VIF) değerinin de artmasının bir ölçüt olarak kullanılması.

- k değişkenli modeldeki bir kısmi bağlanım katsayısının varyansı, VŞÇ cinsinden şu şekilde gösterilebilir:

$$\text{var}(\hat{\beta}_i) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\left(\frac{1}{1-R_i^2}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\text{VŞÇ}_i$$

- $\hat{\beta}_i$ ve R_i^2 değerleri burada X_i'nin kısmi bağlanım ve belirleme katsayılarıdır. VŞÇ_i ise varyans şişme çarpanıdır.
- Bir başparmak kuralı olarak, bir değişkenin VŞÇ değeri 10'dan büyükse çoklueşdoğrusallığı da yüksektir denebilir.
- Bazı ekonometriciler VŞÇ yerine almaşık olarak *"hoşgörü"* (tolerance), kısaca *"HOŞ"* (TOL) değerini kullanırlar:

  Hoşgörü

$$\text{HOŞ}_i = \frac{1}{\text{VŞÇ}_i} = (1 - R_i^2)$$

- Buna göre X_i diğer değişkenlerle tam ilişkiliyse $\text{HOŞ}_i = 0$, ilişkisizse de $\text{HOŞ}_i = 1$ olur.
- $\text{var}(\hat{\beta}_i)$ tanımından, yüksek bir HOŞ_i değerinin düşük bir σ^2 ya da yüksek bir $\sum x_i^2$ ile dengelenebildiği görülmektedir.
- Dolayısıyla küçük bir HOŞ (ya da büyük bir VŞÇ) yüksek ölçünlü hatalar bulmak için ne yeterli ne de gereklidir.

3.3.2 Çoklueşdoğrusallığı Düzeltici Önlemler

Çoklueşdoğrusallığın nasıl giderileceğine ilişkin kesin kurallar yoktur. Uygulanabilecek gevşek kurallardan bazıları şunlardır:

1. Önsel bilgilere başvurmak
2. Havuzlamalı verilerden yararlanmak
3. Bazı değişkenleri bırakmak
4. Verileri dönüştürmek
5. Ek ya da yeni veriler derlemek

6. Diğer iyileştirici önlemler

Yöntem 1: Önsel bilgilere başvurmak
Çoklueşdoğrusallık sorununu gidermek için, modele önsel bilgilere dayalı sınırlamalar getirilebilir.

- Aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada Y_i tüketimi, X_{2i} geliri, X_{3i} de serveti göstermektedir. Gelir ile servet yüksek derecede eşdoğrusaldır.
- $\beta_3 = 0{,}1\beta_2$ olduğunu *"önsel"* (a priori) olarak bildiğimizi varsayalım. Bundan yararlanarak şunu elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + 0{,}1\beta_2 X_{3i} + u_i \\ &= \beta_1 + \beta_2 X_{4i} + u_i \end{aligned}$$

- Burada $X_{4i} = X_{2i} + 0{,}1X_{3i}$'dir.
- $\hat{\beta}_2$ bir kez bulunduktan sonra $\hat{\beta}_3$ da β_2 ile β_3 arasında var olduğu düşünülen ilişkiden kolayca bulunabilir.
- Önsel bilgiden yararlanabilmek için katsayılar arasındaki ilişkiye ait böyle bir bilginin öncelikle var olması gereklidir.
- Önsel bir bilgi daha önceki görgül çalışmalardan ya da modelin gerisinde yatan kuramdan gelebilir.
- Örnek olarak, Cobb-Douglas türü üretim işlevine dayanan bir modelde ölçeğe göre sabit getiri olması bekleniyorsa, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ sınırlaması geçerli olur.
- Diğer yandan, modele sınırlama getirmek konusunda dikkatli olunmalıdır.
- Öncelikli amacımızın kuramın ileri sürdüğü önsel bilgileri modele zorla sokmak değil, bu beklentilerin kendisini sınamak olduğunu unutmamalıyız.

Yöntem 2: Havuzlamalı verilerden yararlanmak
Dışsal ya da önsel bilginin bir biçimi de *"havuzlamalı veriler"* (pooled data) kullanmak, diğer bir deyişle yatay kesit ve zaman serisi verilerini bir araya getirmektir.

- Aşağıdaki bağlanımı ele alalım:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln P_t + \beta_3 \ln I_t + u_t$$

- Burada Y satış sayısını, P ortalama fiyatı, I geliri ve t ise zamanı göstermektedir.
- Zaman serisi verilerinde fiyat ve gelir değişkenleri yüksek bir eşdoğrusallık gösterme eğilimindedir.
- Diğer yandan, zaman içerisinde tek bir noktada derlenen kesit verilerinde fiyat çok değişikliğe uğramadığı için bu sorunla fazla karşılaşılmaz.
- Yatay kesit verileri kullanılarak β_3'ün güvenilir bir tahmini bulunduktan sonra, zaman serisi bağlanımı şöyle yazılır:

$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 \ln P_t + u_t$$

- Burada $Y^* = \ln Y - \beta_3 \ln I$ dönüştürmesi kullanılmıştır.
- Gelir etkisinden arındırmalı Y değerleri kullanılarak, artık β_2 tahmin edilebilir.
- Yatay kesit ve zaman serisi verilerini bir araya getirmenin bazı yorum sorunları doğurabileceği unutulmamalıdır.
- Örnek olarak, burada kesit verileriyle bulunan esnekliğin zaman serisiyle bulunan değere eşit olduğu örtük olarak varsayılmaktadır.

Yöntem 3: Bazı değişkenleri bırakmak
Ciddi bir çoklueşdoğrusallıkla karşılaşınca izlenebilecek bir diğer yol da değişkenlerden bir ya da birkaçını bırakmaktır.

- Diğer yandan, modelden değişken çıkartmak bir model *"belirtim yanlılığı"* (specification bias) ya da *"belirtim hatası"* (specification error) sorununa yol açabilir.
- Örnek olarak, doğru model aşağıdaki gibi olsun:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Yanlışlıkla aşağıdaki modeli yakıştırmış olalım:

$$Y_i = b_1 + b_{12} X_{2i} + \hat{u}_i$$

- Bu durumda şöyle bir yanlılık ortaya çıkar:

$$E(b_{12}) = \beta_2 + \beta_3 b_{32}$$

- b_{32} burada X_3'ün X_2'ye göre bağlanımındaki eğimdir.
- Örnekte gösterilen b_{12}, β_2'nin *"yanlı"* (biased) tahmincisidir.
- Diğer bir deyişle b_{12} katsayısı, $\beta_3 b_{32}$ çarpımının işaretine bağlı olarak β_2'yi düşük ya da yüksek tahmin eder.
- Bu noktada, tama yakın çoklueşdoğrusallık varken bile SEK tahmincilerinin EDYT olduğunu anımsayalım.
- Çoklueşdoğrusallık modeldeki anakütle katsayılarının keskin olarak tahmin edilmesini engellemektedir.
- Bir değişkeni çıkartmak ise yanlılığa yol açarak anakütle katsayılarının gerçek değeri konusunda bizi yanıltabilir.
- Demek ki bazı durumlarda ilaç hastalıktan daha kötü olabilmektedir.

Yöntem 4: Verileri dönüştürmek
Çoklueşdoğrusallık, verileri dönüştürerek de yok edilebilir.

- Uygulamada sıkça kullanılan veri dönüştürme yollarından biri, *"oran dönüşümü"* (ratio transformation) yöntemidir.
- Aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada Y_i tüketim, X_{2i} milli gelir ve X_{3i} de toplam nüfustur.
- Toplam gelirin nüfus ile eşdoğrusallık göstermesi sorunu, modelin kişi başına olarak belirtilmesiyle çözülebilir:

$$\frac{Y_i}{X_{3i}} = \beta_1 \left(\frac{1}{X_{3i}}\right) + \beta_2 \left(\frac{X_{2i}}{X_{3i}}\right) + \beta_3 + \left(\frac{u_i}{X_{3i}}\right)$$

- Buradaki sorunsa ilk bağlanımdaki u_i terimi sabit varyansla dağılıyor olsa bile dönüştürmeli bağlanımındaki u_i/X_{3i}'nin *"farklıserpilimsellik"* (heteroscedasticity) göstermesidir.

- Bir diğer dönüştürme yöntemi olarak şu modeli ele alalım:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$

- Buradaki gelir (X_{2t}) ve servetin (X_{3t}) eşdoğrusallıklarının bir nedeni, bunların zaman içinde birlikte değişmeleridir.
- Zamanın ilk noktası t isteğe bağlı olduğu için şu yazılabilir:

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{2,t-1} + \beta_3 X_{3,t-1} + u_{t-1}$$

- Yukarıdaki ikinci denklemi birinciden çıkartırsak, modeli *"birinci fark"* (first difference) biçiminde yazmış oluruz:

$$Y_t - Y_{t-1} = \beta_2(X_{2t} - X_{2,t-1}) + \beta_3(X_{3t} - X_{3,t-1}) + v_t$$

- Bu işlem eşdoğrusallık sorununu azaltır çünkü X_2 ile X_3'ün farklarının eşdoğrusal olması için önsel bir neden yoktur.
- Ancak birinci fark dönüşümü gözlemlerin sıralı olmadığı yatay kesit verileri için uygun değildir.
- Ayrıca, fark alma nedeniyle baştaki gözlem yitirildiği için serbestlik derecesi de bir azalır.

Yöntem 5: Yeni veriler derlemek
Çoklueşdoğrusallık bir örneklem özelliği olduğuna göre, daha büyük ya da aynı değişkenlerin yer aldığı farklı bir örneklemde daha az ciddi olabilir.

- Üç değişkenli model için varyans formülünü anımsayalım:

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1 - r_{23}^2)}$$

- Görüldüğü gibi, örneklem büyürken $\sum x_{2i}^2$ de büyümekte ve buna koşut olarak azalan var$(\hat{\beta}_2)$ değeri β_2'nin daha kesin tahmin edilmesini sağlamaktadır.
- Ancak, iktisadi çalışmalarda ek veriler bulabilmek ya da "daha iyi" veriler derleyebilmek her zaman kolay değildir.

Yöntem 6: Diğer düzeltici önlemler
Çoklueşdoğrusallığı gidermeye yönelik başka dönüştürme ve tahmin yöntemleri de bulunmaktadır.

- Örnek olarak, açıklayıcı değişkenlerin çeşitli üstlerle girdiği *"çokterimli"* (polynomial) modellerde, çoklueşdoğrusallığı azaltmanın bir yolu X'leri sapmalar biçiminde kullanmaktır.

- Bunların dışında, çoklueşdoğrusallık sorununu çözmede
  "etmen çözümlemesi" (factor analysis),
  "baş bileşenler" (principal components),
  "sırt bağlanımı" (ridge regression)
  gibi yöntemler de sıkça kullanılır.

- Bunlar daha ileri düzeydeki bir tartışmanın konusudur.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 10* “Multicollinearity: What Happens if the Regressors Are Correlated?” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Farklıserpilimsellik

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011