Bölüm 2

Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

2.1 Dizey Yaklaşımı ile Doğrusal Bağlanım Modeli

2.1.1 k Değişkenli Modelin Dizey Gösterimi

Dizey Yaklaşımının Önemi

- Y bağımlı değişkeni ile $(k-1)$ sayıda açıklayıcı değişken $(X_2, X_3, \ldots, X_k)$ içeren k değişkenli doğrusal bağlanım modelini ele almak için en doğru yaklaşım dizey cebiridir.
- Dizey cebirinin *"sayıl"* (scalar) cebirine üstünlüğü, herhangi bir sayıda değişken içeren bağlanım modellerini ele alıştaki yalın ve öz yaklaşımıdır.
- k değişkenli model bir kez kurulduktan ve dizey cebiri ile çözüldükten sonra bu çözüm çok sayıda değişkene kolaylıkla uygulanabilir.

k Değişkenli Bağlanımın Dizey Gösterimi

- k değişkenli anakütle bağlanım işlevini anımsayalım:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + u_i$$

- Burada i örneklem büyüklüğü olduğuna göre, elimizdeki ABİ şu n sayıdaki eşanlı denklemin kısa yazılışıdır:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
Y_1 & = & \beta_1 & + & \beta_2 X_{21} & + & \beta_3 X_{31} & + \ldots + & \beta_k X_{k1} & + & u_1 \\
Y_2 & = & \beta_1 & + & \beta_2 X_{22} & + & \beta_3 X_{32} & + \ldots + & \beta_k X_{k2} & + & u_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Y_n & = & \beta_1 & + & \beta_2 X_{2n} & + & \beta_3 X_{3n} & + \ldots + & \beta_k X_{kn} & + & u_n
\end{array}$$

- Yukarıdaki denklem setini şöyle de gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca $\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\mathbf{B}_{k\times 1} + \mathbf{u}_{n\times 1}$.

- $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{u}$'nun boyutlarının karışıklığa yol açmayacağı durumda, doğrusal bağlanım modelinin dizey gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$$

- Burada
  $\mathbf{Y}$ bağımlı değişken gözlemlerinin $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,
  $\mathbf{X}$ X_2'den X_k'ye kadar olan $k-1$ değişkenin n sayıdaki gözleminin $n \times k$ boyutlu dizeyini,
  $\mathbf{B}$ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ anakütle katsayılarının $k \times 1$ boyutlu sütun yöneyini,
  $\mathbf{u}$ ise u_i *"bozukluk"* (disturbance) teriminin $n \times 1$ boyutundaki sütun yöneyini
  göstermektedir.

- Örnek olarak daha önce incelemiş olduğumuz iki değişkenli tüketim-gelir modelinin dizey yaklaşımı ile gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 65 \\ 90 \\ 95 \\ 110 \\ 115 \\ 120 \\ 140 \\ 155 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 80 \\ 1 & 100 \\ 1 & 120 \\ 1 & 140 \\ 1 & 160 \\ 1 & 180 \\ 1 & 200 \\ 1 & 220 \\ 1 & 240 \\ 1 & 260 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca şöyle yazılabilir:

$$\mathbf{Y}_{10\times 1} = \mathbf{X}_{10\times 2}\mathbf{B}_{2\times 1} + \mathbf{u}_{10\times 1}$$

2.1.2 KDBM Varsayımlarının Dizey Gösterimleri

Dizey cebiri yaklaşımı, önceden görmüş olduğumuz klasik doğrusal bağlanım modeli (KDBM) varsayımlarını incelemede büyük kolaylık sağlamaktadır. Şimdi bu beş varsayımı dizey yaklaşımı ile ele alalım:

1. Varsayım
$\mathbf{u}$ bozukluk yöneyinin tüm öğeleri için beklenen değer sıfırdır. Kısaca hata teriminin beklenen değeri sıfırdır: $E(\mathbf{u}) = 0$.

- Daha açık olarak $E(\mathbf{u}) = 0$ şu demektir:

$$E\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Varsayım
u_i hataları, sıfır ortalama ve sabit bir varyans ile normal dağılırlar: $\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$.

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise aynı boyutlu bir boş yöneydir.
- Bu varsayım, bağlanımın tahmin edilmesinden sonra çeşitli önsav sınamalarının yapılabilmesi için gereklidir.

3. Varsayım
Hatalar arasında özilinti yoktur: $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$.

- Bu varsayımın daha önce sayısal olarak ele alınan üç varsayımın kısa ve öz anlatımı olduğu şöyle gösterilebilir:

$$E(\mathbf{uu}') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

- Dizeyin her bir öğesinin beklenen değerini alalım:

$$E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \dots & E(u_1u_n) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & \dots & E(u_2u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_nu_1) & E(u_nu_2) & \dots & E(u_n^2) \end{bmatrix}$$

- Hata terimi ortalaması sıfır varsayılıdır: $E(u_i) = \mu = 0$

- Varyans ve kovaryansın formüllerini anımsayalım:

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2) - \mu^2, \qquad \mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

- Bu durumda, u_i hatalarının *"varyans-kovaryans dizeyi"* (variance-covariance matrix) üçüncü varsayıma göre şöyle olmalıdır:

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}$$

4. Varsayım
$n \times n$ boyutlu $\mathbf{X}$ dizeyi olasılıksal değildir.

- Diğer bir deyişle $X_{2i}, X_{3i}, \dots, X_{ki}$ değişmeyen sayılardan oluşmaktadır.
- Başta belirtildiği gibi, elimizdeki bağlanım çözümlemesi X değişkenlerinin verili değerlerine bağlı bir koşullu bağlanım çözümlemesidir.

5. Varsayım
$\mathbf{X}$'in derecesi k'dir: $\rho(\mathbf{X}) = k$. k burada $\mathbf{X}$'in sütun sayısı olup, gözlem sayısı n'den küçüktür.

- Diğer bir deyişle, X değişkenleri arasında tam bir doğrusal ilişki ya da *"çoklueşdoğrusallık"* (multicollinearity) yoktur.
- Eğer bu varsayım gerçekleşmez ise, bağlanıma ait $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ dizeyinin belirleyeni sıfır olur ve çözümlemede gerekli olan tersi bulunamaz.

2.2 Dizey Yaklaşımı ile Tahmin Sorunu

2.2.1 SEK Tahmincilerinin Bulunması

- $\mathbf{B}$ yöneyini tahmin etmek için sıradan enküçük kareler (SEK) ya da ençok olabilirlik (EO) gibi farklı yaklaşımlar kullanılabildiğini biliyoruz.
- Biz dikkatimizi SEK yöntemi üzerinde toplayacağız.
- Bağlanımın SEK tahminini bulmak için önce k değişken içeren örneklem bağlanım işlevini yazalım:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki} + \hat{u}_i$$

- ÖBİ'yi dizey gösterimiyle açık olarak şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}$$

- Ya da kısaca

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \mathbf{X}_{n\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} + \hat{\mathbf{u}}_{n\times 1}$$

- Bilindiği gibi SEK tahmincileri hata kareleri toplamının enazlanması yolu ile bulunmaktadır.
- Öyleyse yukarıdaki eşitliği şu şekilde de yazabiliriz:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$$

- Hata kareleri toplamının aşağıdaki gösterim biçimine dikkat edelim:

$$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \hat{u}_1{}^2 + \hat{u}_2{}^2 + \cdots + \hat{u}_n{}^2 = \sum \hat{u}_i{}^2$$

- Buna göre $\mathbf{u}'\mathbf{u}$'nun dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

- *Dikkat:* Burada $\mathbf{Y}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ bir sayıl olduğu için, kendi devriği olan $\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$'ye eşittir.

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}$ eşitliğini enazlamak için, bu eşitliğin $\hat{\mathbf{B}}$'ya göre kısmi türevini alır ve sıfıra eşitleriz.

- Bu işlem bize *"normal denklemler"* (normal equations) denilen k bilinmeyenli k eşanlı denklemi verir:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{\beta}_1 n + & \hat{\beta}_2 \sum X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{3i} + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{ki} & = \sum Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{2i} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2 + & \hat{\beta}_3 \sum X_{2i}X_{3i} + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{2i}X_{ki} & = \sum X_{2i}Y_i \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{3i} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{3i}X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{3i}^2 + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{3i}X_{ki} & = \sum X_{3i}Y_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{\beta}_1 \sum X_{ki} + & \hat{\beta}_2 \sum X_{ki}X_{2i} + & \hat{\beta}_3 \sum X_{ki}X_{3i} + \cdots + & \hat{\beta}_k \sum X_{ki}^2 & = \sum X_{ki}Y_i
\end{array}$$

- Yukarıdaki denklem takımının dizey gösterimi şudur:

$$\begin{bmatrix}
n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\
\sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\
\sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 \\
X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\
X_{31} & X_{32} & \dots & X_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

- Bu da kısaca $(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{k\times k}\hat{\mathbf{B}}_{k\times 1} = \mathbf{X}'_{k\times n}\mathbf{Y}_{n\times 1}$ diye yazılır.

Normal denklemlerin dizey gösteriminde yer alan aşağıdaki $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyi önemlidir.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} & \dots & \sum X_{ki} \\
\sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i}X_{3i} & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\
\sum X_{3i} & \sum X_{3i}X_{2i} & \sum X_{3i}^2 & \dots & \sum X_{3i}X_{ki} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum X_{ki} & \sum X_{ki}X_{2i} & \sum X_{ki}X_{3i} & \dots & \sum X_{ki}^2
\end{bmatrix}$$

Bu dizeyin şu üç özelliğine dikkat edelim:

1. $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyi $k \times k$ boyutundadır ve olasılıksal değildir.

2. Asal köşegen öğeleri ham kare toplamlarını, köşegen dışı öğeler ise ham çapraz çarpım toplamlarını gösterir.

3. $X_{2i}X_{3i}$ çapraz çarpımı $X_{3i}X_{2i}$ çapraz çarpımına eşit olduğu için dizey bakışımlıdır.

- Sonuç olarak, k değişkenli modelin SEK tahmincilerini elde etmek için normal denklemlerin dizey gösterimini yazalım:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Eğer $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ dizeyinin tersi varsa, yukarıdaki denklemin her iki yanını bu ters dizeyle önden çarparak şunu bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{X}'\mathbf{Y} \\
(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \\
\mathbf{I}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}
\end{aligned}$$

- Buna göre SEK kuramının temel denkleminin dizey gösterimi şudur:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

- Yukarıdaki eşitlik, eldeki verilerden $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin nasıl tahmin edileceğini gösterir.

2.2.2 Varyans-Kovaryans Dizeyi

- Herhangi bir $\hat{\beta}_i$ varyansı yanında tüm $\hat{\beta}_i$ ve $\hat{\beta}_j$'lar arasındaki kovaryansları dizey yöntemi ile kolayca gösterebiliriz.
- Bu varyans ve kovaryanslar çeşitli istatistiksel çıkarsama işlemleri için önemlidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$'nın *"varyans-kovaryans dizeyi"* (variance-covariance matrix) şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = E\left([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]'\right)$$

- Buna göre $\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}})$ aslında şu dizeydir:

$$\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & \mathrm{var}(\hat{\beta}_2) & \dots & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_2) & \dots & \mathrm{var}(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

varcov(B) Dizeyinin Türetilmesi

- varcov($\hat{\mathbf{B}}$)'yı türetmede $\mathbf{Y} = \mathbf{XB} + \mathbf{u}$ eşitliğinden yararlanılır.

Üsttekini $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ temel denkleminde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{XB} + \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{XB} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \\ &= \mathbf{B} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\end{aligned}$$

Demek ki $\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$. varcov($\hat{\mathbf{B}}$) varyans-kovaryans dizeyi ise tanım gereği şöyledir:

$$\begin{aligned}\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= E([\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}][\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}]') \\ &= E\left([(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'\right) \\ &= E\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{uu}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\right)\end{aligned}$$

- X'lerin olasılıksal olmadığına dikkat edilerek şu bulunabilir:

$$\begin{aligned}\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{E}(\mathbf{uu}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{IX}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\end{aligned}$$

- *Dikkat:* Yukarıda $E(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I}$ varsayımı kullanılmıştır.
- Türetilmesinden de anlaşılacağı gibi varyans-kovaryans dizeyi aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

  Varyans-kovaryans Dizeyi

$$\mathsf{varcov}(\hat{\mathbf{B}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}$$

- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}$ burada $\hat{\mathbf{B}}$ SEK tahmincilerini veren eşitlikte yer alan ters dizeydir.
- σ^2 ise u_i'nin sabit varyansıdır. Uygulamada σ^2 yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.
- k değişkenli durumda $\hat{\sigma}^2$ aşağıdaki eşitlikten bulunabilir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u_i}^2}{n-k} = \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{n-k}$$

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$, ilke olarak tahmin edilen kalıntılardan bulunabilse de uygulamada şu yolla doğrudan hesaplanabilir:

$$\sum \hat{u_i}^2 = \text{KKT} = \text{TKT} - \text{BKT}$$

- Toplam kareleri toplamı aşağıdaki şekilde gösterilir:

  Toplam kareleri toplamı

$$\sum \hat{y_i}^2 = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

- $n\bar{Y}^2$ terimi burada ortalamadan sapma kareleri toplamının bulunması için gereken düzeltme terimidir.

- Bağlanım kareleri toplamının dizey gösterimi ise şöyledir:

  Bağlanım kareleri toplamı

$$\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k \sum y_i x_{ki} = \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$$

- Kalıntı kareleri toplamı KKT ise TKT ve BKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

  Kalıntı kareleri toplamı

$$\begin{aligned} \text{KKT} &= \text{TKT} - \text{BKT} \\ \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} &= (\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) - (\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2) \\ &= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned}$$

- $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ bulunduktan sonra $\hat{\sigma}^2$'yi kolayca hesaplayabiliriz.

- $\hat{\sigma}^2$'yi hesapladıktan sonra ise varyans-kovaryans dizeyini tahmin edebiliriz.

SEK Tahmincilerinin Özellikleri

- SEK tahmincilerinin en iyi doğrusal yansız tahminci ya da kısaca *"EDYT"* (BLUE) olduklarını biliyoruz.

- Bu özellik elbette dizey yaklaşımıyla bulunan $\hat{\mathbf{B}}$ için de geçerlidir.

- Buna göre $\hat{\mathbf{B}}$ yöneyinin her bir öğesi bağımlı değişken Y'nin doğrusal işlevidir.

- $\hat{\mathbf{B}}$ yansızdır. Diğer bir deyişle tüm öğelerinin beklenen değeri öğenin kendisine eşittir: $E(\hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{B}$.

- SEK tahmincisi $\hat{\mathbf{B}}$, tüm $\mathbf{B}$ tahmincileri içinde en iyi, enaz varyanslı tahmincidir.

Belirleme Katsayısının Dizey Gösterimi

- Belirleme katsayısı R^2'yi daha önce şöyle tanımlamıştık:

$$R^2 = \frac{\text{BKT}}{\text{TKT}}$$

- Buna göre belirleme katsayısının dizey gösterimi de şöyledir:

$$R^2 = \frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}$$

İlinti Dizeyi

- Dizey yaklaşımında, k değişkenli durum için, değişkenler arasındaki sıfırıncı dereceden ilinti katsayılarını veren *"ilinti dizeyi"* (correlation matrix) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Burada 1 alt imi bağımlı değişken Y'yi gösterir. Örnek olarak, Y ile X_2 arasındaki ilinti katsayısı r_{12}'dir.
- Asal köşegen üzerindeki 1'ler ise bir değişkenin kendisiyle olan ilinti katsayısının her zaman 1 olmasındandır.
- İlinti dizeyi $\mathbf{R}$ kullanılarak birinci dereceden ve daha yüksek dereceden ilinti katsayılarını da elde etmek olasıdır.

2.3 Dizey Yaklaşımı ile Çıkarsama Sorunu

2.3.1 Bireysel Katsayıların Önsav Sınamaları

- Tahmin sonrasında çıkarsama yapabilmek için, u_i hatalarının sıfır ortalama ve sabit varyans σ^2 ile normal dağıldıklarını varsayıyoruz:

$$\mathbf{u} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

- $\mathbf{u}$ burada $n \times 1$ boyutlu sütun yöneyi, $\mathbf{0}$ ise boş yöneydir.
- Buna göre, SEK tahmincileri $\hat{\beta}_i$'lar da aşağıda gösterilen şekilde normal dağılırlar:

$$\hat{\mathbf{B}} \sim N[\mathbf{B}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

- Demek ki $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi, gerçek $\mathbf{B}$ öğesiyle eşit ortalama ile ve $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ters dizeyinin asal köşegenindeki uygun öğe çarpı σ^2'ye eşit varyans ile normal dağılmaktadır.
- $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$'in varyans-kovaryans dizeyi olduğuna dikkat ediniz.
- Uygulamada σ^2 bilinmediği için t dağılımına geçilir ve $\hat{\sigma}^2$ tahmincisi kullanılır.
- Bu durumda $\hat{\mathbf{B}}$'nın her öğesi $n - k$ sd ile t dağılımına uyar:

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\text{öh}(\hat{\beta}_i)}$$

- $\hat{\beta}_i$ burada $\hat{\mathbf{B}}$'nın bir öğesidir.
- Demek ki t dağılımını kullanarak herhangi bir $\hat{\beta}_i$'nın güven aralığını bulmak ve çeşitli sınamaları yapmak olanaklıdır.

2.3.2 Varyans Çözümlemesi ve F Sınamaları

Varyans Çözümlemesinin Dizey Gösterimi

- Tüm bağlanım katsayılarının eşanlı olarak sıfıra eşit olduğu önsavını sınamak ya da bir değişkenin ek katkısını ölçmek için VARÇÖZ yönteminin kullanıldığını anımsayalım.
- TKT, BKT ve KKT'nin dizey gösterimleri kullanılarak aşağıdaki gibi bir VARÇÖZ çizelgesi düzenlenebilir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$k-1$	$\frac{\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	$n-k$	$\frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Buna göre:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)/(k-1)}{(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y})/(n-k)}$$

- F ve R^2 değerlerinin yakın ilişkili olduğunu biliyoruz.
- Buna göre VARÇÖZ çizelgesinin R^2 gösterimi de şöyledir:

Değişimin Kaynağı	KT	sd	OKT
Bağlanımdan (BKT)	$R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$k-1$	$\frac{R^2(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)}{k-1}$
Kalıntılardan (KKT)	$(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$	$n-k$	$\frac{(1-R^2)(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)}{n-k}$
Toplam (TKT)	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2$	$n-1$	

- Demek ki:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

- Bu gösterimin üstünlüğü, tüm hesaplamaların yalnız R^2 ile yapılabilmesi ve sadeleştirme sonrası ortadan kalkacak olan $(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - n\bar{Y}^2)$ terimiyle ilgilenmeye gerek kalmamasıdır.

F Sınamasının Dizey Gösterimi

- Genel olarak, F sınamasının amacı bir ya da birden fazla anakütle katsayısı üzerine konulan doğrusal sınırlamaları sınamaktır.
- Bu sınamanın dizey karşılığını türetebilmek için aşağıdaki tanımlardan yararlanalım:

$\hat{\mathbf{u}}_S$	: Sınırlamalı SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}_{SM}$	: Sınırlamasız SEK bağlanımının kalıntı yöneyi
$\hat{\mathbf{u}}'_S\hat{\mathbf{u}}_S = \sum \hat{u}_S^2$	: Sınırlamalı bağlanıma ait KKT
$\hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM} = \sum \hat{u}_{SM}^2$	: Sınırlamasız bağlanıma ait KKT
m	: Doğrusal sınırlama sayısı
k	: Sabit terim dahil anakütle katsayılarının sayısı
n	: Gözlem sayısı

- Genel F sınamasının dizey gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$F = \frac{(\hat{\mathbf{u}}'_S\hat{\mathbf{u}}_S - \hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM})/m}{(\hat{\mathbf{u}}'_{SM}\hat{\mathbf{u}}_{SM})/(n-k)}$$

- Yukarıda gösterilen istatistik, m ve $(n-k)$ serbestlik derecesi ile F dağılımına uyar.
- Hesaplanan F değeri eğer kritik F değerinden büyükse, sınırlamalı bağlanım sıfır önsavı reddedilir.

2.3.3 Dizey Gösterimi ile Kestirim

- Tahmin edilen bir bağlanım işlevi, belli bir X_0 değerine karşılık gelen Y'yi kestirmek için kullanılabilir.
- İki türlü kestirim vardır: *"Ortalama kestirimi"* (mean prediction) ve *"bireysel kestirim"* (individual prediction).
- Ortalama kestirimi, seçili X_0 değerlerine bağlanım doğrusu üzerinde yakıştırılan noktanın tahmin edilmesi demektir.
- Bireysel kestirim ise X_0'ın karşılığı olan Y değerinin kendisidir.
- Bu iki kestirim biçimi de $\hat{Y}$ için aynı nokta tahmini verir.
- Diğer yandan bireysel kestirimin varyansı, ölçünlü hatası ve bunlara bağlı olarak da güven aralığı ortalama kestirime göre daha yüksektir.

Ortalama Kestiriminin Dizey Gösterimi

- Ortalama kestirimini dizey cebiri ile göstermek için, tahmin edilen çoklu bağlanımın sayıl gösterimini anımsayalım:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$

- Yukarıdaki eşitliğin dizey gösterimi kısaca şöyledir:

$$\hat{Y}_i = \mathbf{x}'_i \hat{\mathbf{B}}$$

- $\mathbf{x}'_i = [1, X_{2i}, X_{3i}, \ldots, X_{ki}]$ burada bir satır yöneyidir.
- $\hat{\mathbf{B}}$ ise tahmin edilen β'ları gösteren bir sütun yöneyidir.
- Buna göre, verili bir $\mathbf{x}'_0 = [1, X_{20}, X_{30}, \ldots, X_{k0}]$ yöneyine karşılık gelen $\hat{Y}_0$ ortalama kestirimi aşağıdaki biçimi alır:

$$(\hat{Y}_0 | \mathbf{x}'_0) = \mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}$$

- Burada $\mathbf{x}_0$'lar verili değerlerdir.
- Ortalama kestirimi ayrıca yansızdır: $E(\mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}) = \mathbf{x}'_0 \hat{\mathbf{B}}$.
- Ortalama kestiriminin varyansı ise şöyledir:

$$\text{var}(\hat{Y}_0 | \mathbf{x}'_0) = \sigma^2 \mathbf{x}'_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}'_0$$

- $\mathbf{x}'_0$ burada kestirim yapmada kullanılan X değişkenlerinin verili değerlerini içeren satır yöneyidir.
- $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ ise çoklu bağlanım tahmininde kullanılan dizeydir.
- Uygulamada, hata teriminin sabit varyansı σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ koyularak formül şu şekilde yazılır:

$$\text{var}(\hat{Y}_0 | \mathbf{x}'_0) = \hat{\sigma}^2 \mathbf{x}'_0 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}'_0$$

- Yukarıdaki eşitlik kullanılarak, $\mathbf{x}'_0$ veriliyken $\hat{Y}_0$ ortalama kestiriminin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı bulunabilir.

Bireysel Kestirimin Dizey Gösterimi

- Y'nin bireysel kestirimi $(Y_0|\mathbf{x'}_0)$, ortalama kestirimi $(\hat{Y_0}|\mathbf{x'}_0)$ ile aynıdır:

$$(Y_0|\mathbf{x'}_0) = \mathbf{x'}_0\hat{\mathbf{B}}$$

- Diğer yandan, bireysel kestirimin varyansı ortalama kestiriminin varyansından daha büyüktür:

$$\text{var}(Y_0|\mathbf{x'}_0) = \hat{\sigma}^2[1 + \mathbf{x'}_0(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{x'}_0]$$

- $\text{var}(Y_0|\mathbf{x'}_0)$ burada $E[Y_0 - \hat{Y_0}|X]^2$ demektir.
- Uygulamada, ortalama kestiriminde olduğu gibi, σ^2 yerine yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Appendix C* “The Matrix Approach to Linear Regression Model” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Çoklueşdoğrusallık

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011