Bölüm 1

Dizey Cebirinin Gözden Geçirilmesi

1.1 Dizeylere İlişkin Temel Kavramlar

1.1.1 Tanımlar

- Dizey cebiri kullanmaksızın k değişkenli bir bağlanım modeliyle uğraşmak son derece karmaşık bir iştir.
- Burada, doğrusal bağlanım modelini dizey yaklaşımı ile ele alabilmek için gerekli temel altyapı sunulacaktır.

Dizey
$M \times N$ boyutlu bir *"dizey"* (matrix), M satır ve N sütun biçiminde düzenlenmiş sayılar ya da öğelerin dikdörtgen bir dizgesidir.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- a_{ij} burada $\mathbf{A}$ dizeyinin i'inci satırı ve j'inci sütununda görülen öğeyi anlatmaktadır.
- 2×3 boyutundaki bir dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sayıl
"Sayıl" (scalar), tek bir gerçek sayıdır ve 1×1 boyutunda bir dizey kabul edilir.

- Sayıla örnek:

$$\mathbf{B}_{1\times 1} = [5]$$

Sütun Yöneyi
Tek bir sütunu ve M sayıda satırı olan dizeye *"sütun yöneyi"* (column vector) denir.

- Sütun yöneyine örnek:

$$\mathbf{A}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Satır Yöneyi
Tek bir satırı ve N sayıda sütunu olan dizeye *"satır yöneyi"* (row vector) denir.

- Satır yöneyine örnek:

$$\mathbf{B}_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Altdizey
$M \times N$ boyutundaki bir $\mathbf{A}$ dizeyinin r sayıda satırı ile s sayıda sütununun dışındaki tüm öğeleri silinirse elde edilen $r \times s$ boyutlu dizey, $\mathbf{A}$'ya ait bir *"altdizey"* (submatrix) olur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen $\mathbf{A}$ dizeyinin üçüncü satırıyla ikinci sütununu silersek $\mathbf{A}$'nın 2×2 boyutundaki bir $\mathbf{B}$ altdizeyini bulmuş oluruz:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Dizey Türleri

Kare Dizey
Satır sayısı sütun sayısı ile aynı olan dizeye *"kare dizey"* (square matrix) denir.

- Kare dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Köşegen Dizey
Asal (sol üst köşeden sağ alt köşeye uzanan) köşegeninde en az bir sıfırdan farklı öğe bulunan ve bu köşegen dışı tüm öğeleri sıfır olan dizeye *"köşegen dizey"* (diagonal matrix) denir.

- Köşegen dizeye örnek:

$$\mathbf{B}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Sayıl Dizey
Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi aynı olan köşegen dizeye *"sayıl dizey"* (scalar matrix) denir.

- Sayıl dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Birim Dizey
Köşegeni üzerindeki öğelerinin hepsi 1 olan köşegen dizeye *"birim dizey"* (identity matrix) denir ve $\mathbf{I}$ ile gösterilir.

- Birim dizeye örnek:

$$\mathbf{I}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bakışımlı Dizey
Asal köşegeni üzerindeki öğeleri, asal köşegeni altındaki öğelerinin bakışımı olan dizeye *"bakışımlı dizey"* (symmetric matrix) denir. Devriği kendisine eşittir.

- Bakışımlı dizeye örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Eşit Dizeyler
$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ gibi iki dizeyin boyutları aynıysa ve karşılıklı öğeleri birbirine eşitse ($a_{ij} = b_{ij}$), bu dizeyler eşittir.

- Eşit dizeylere örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Boş Dizey
Bütün öğeleri sıfır olan dizeye *"boş dizey"* (null matrix) denir ve **0** ile gösterilir.

- Boş dizeye örnek:

$$\mathbf{0}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Boş Yöney
Bütün öğeleri sıfır olan satır ya da sütun yöneyine *"boş yöney"* (null vector) denir ve **0** ile gösterilir.

- Boş yöneye örnek:

$$\mathbf{0}_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Dizey İşlemleri

1.2.1 Temel İşlemler

Dizey Toplaması ve Çıkarması
$\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ dizeylerinin toplamı ya da farkı, karşılıklı öğelerinin toplamı ya da farkı alınarak elde edilir. Bu dizeylerin toplama ya da çıkarma için uyumlu olabilmeleri için boyutları aynı olmalıdır.

- Dizey toplamasına örnek:

$$\mathbf{A}_{3\times2} + \mathbf{B}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Bir Dizeyin Bir Sayıl ile Çarpımı ya da Bölümü
Bir $\mathbf{A}$ dizeyini $\lambda \in \mathrm{R}$ sayılı ile çarpmak ya da bölmek için, dizeyin bütün öğeleri λ ile çarpılır ya da $\lambda \neq 0$'a bölünür.

Dizeyler Çarpımı
Boyutu $M \times N$ olan $\mathbf{A}$ ve boyutu $N \times P$ olan $\mathbf{B}$ dizeylerinin $\mathbf{AB}$ çarpımı, $M \times P$ boyutunda ve aşağıdaki gibi bir $\mathbf{C}$ dizeyi olur.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj} \qquad i = \{1, 2, \ldots, M\} \qquad j = \{1, 2, \ldots, P\}$$

- Diğer bir deyişle $\mathbf{C}$'nin i'inci satır ve j'inci sütun öğesi, $\mathbf{A}$'nın i'inci satırındaki öğelerinin $\mathbf{B}$'nin j'inci sütunundaki karşılıklı öğeleri ile çarpılıp, çarpımların toplanması ile bulunur.

Dizeyler çarpımı işlemi aşağıdaki özellikleri taşır:

1. Dizey çarpımı değişmeli olmak zorunda değildir. Kısaca dizeylerin çarpım sıralaması önemlidir: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

2. $\mathbf{AB}$ ve $\mathbf{BA}$'nın sonuç dizeyleri aynı boyutta olmayabilir:

$$\mathbf{A}_{K\times L}\mathbf{B}_{L\times K} = \mathbf{C}_{K\times K} \qquad \mathbf{B}_{L\times K}\mathbf{A}_{K\times L} = \mathbf{D}_{L\times L}$$

3. $\mathbf{A}_{1\times K}$ satır yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{K\times 1}$ sütun yöneyi bir sayıl olur.

4. $\mathbf{A}_{K\times 1}$ sütun yöneyiyle önden çarpılan $\mathbf{B}_{1\times K}$ satır yöneyi bir dizey olur.

5. Dizey çarpımı birleştiricidir: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

6. Dizey çarpımı toplama bakımından dağıtıcıdır:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

Dizey Devriği Alma
$M \times N$ bir $\mathbf{A}$ dizeyinin $\mathbf{A}'$ ile gösterilen *"devriği"* (transpose), $\mathbf{A}$'nın satır ve sütunlarına yer değiştirterek, yani $\mathbf{A}$'nın i'inci satırını $\mathbf{A}'$'nün i'inci sütunu yaparak elde edilen $N \times M$ dizeyidir.

$$\mathbf{A}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}'_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Bir satır yöneyinin devriği sütun yöneyi olup, bir sütun yöneyinin devriği de satır yöneyidir.

Devrik dizey dönüşümünün bazı özellikleri şunlardır:

1. Devrik bir dizeyin devriği ilk dizeydir: $(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$

2. İki dizey toplamının devriği, devriklerin toplamıdır:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$$

3. Dizey çarpımının devriği, bu dizeylerin devriklerinin ters sırada çarpımıdır: $(\mathbf{ABCD})' = \mathbf{D}'\mathbf{C}'\mathbf{B}'\mathbf{A}'$

4. Birim dizey $\mathbf{I}$'nın devriği kendisidir: $\mathbf{I}' = \mathbf{I}$

5. Bir sayılın devriği kendisidir. λ bir sayıl olsun: $\lambda' = \lambda$

6. λ bir sayıl olsun: $(\lambda\mathbf{A})' = \lambda\mathbf{A}' = \mathbf{A}'\lambda = \mathbf{A}'\lambda'$

7. $\mathbf{A}$ dizeyi eğer $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ olacak şekilde kare dizeyse, $\mathbf{A}$ bakışımlı bir dizey olur.

1.2.2 Belirleyen ve Dizey Tersi Alınması

Bir Dizeyin Belirleyeni

- Her kare dizey $\mathbf{A}$ için, *belirleyen* (determinant) diye bilinen ve $|\mathbf{A}|$ şeklinde gösterilen bir sayıl vardır.
- Bir dizeyin belirleyeninin hesaplanması, iyi tanımlı bir dizi işlem ile gerçekleştirilir.
- Örnek olarak 2×2 boyutundaki bir dizeyin belirleyeni, asal köşegen üzerindeki öğelerin çarpımından diğer köşegen öğelerinin çarpımının çıkartılması ile bulunur.
- Herhangi bir derecedeki belirleyenin açılımında, terimler dönüşümlü olarak $+$ ve $-$ işaret alırlar.
- 3×3 bir belirleyenin açılımında 6 terim bulunur. Genel olarak, $N \times N$ bir belirleyenin açılımında $N!$ terim vardır.
- Buna göre, 5×5 bir dizeye ait belirleyenin açılımında $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ terim bulunur.

Belirleyenin özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. Belirleyeni sıfır olan dizeye *"tekil dizey"* (singular matrix) denir. Bir tekil dizeyin tersi bulunamaz.
2. $\mathbf{A}$'nın herhangi bir satırındaki tüm öğeler sıfırsa, belirleyeni de sıfır olur.
3. $\mathbf{A}$ ile devrik $\mathbf{A}$'nın belirleyenleri aynıdır: $|\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|$
4. $\mathbf{A}$ dizeyinin herhangi iki satır ya da sütunu yer değiştirirse, $|\mathbf{A}|$'nın işareti değişir.
5. $\mathbf{A}$'nın iki satır ya da sütunu aynıysa, belirleyeni sıfır olur.
6. $\mathbf{A}$'nın bir satır ya da sütunu başka bir satır ya da sütununun bir katı ya da doğrusal bir birleşimiyse, belirleyeni sıfırdır.
7. $\mathbf{A}$'nın bir satır ya da sütunundaki tüm öğeler bir λ sayılı ile çarpılırsa, $|\mathbf{A}|$ da λ ile çarpılır.
8. İki dizeyin çarpımının belirleyeni dizeylerin ayrı ayrı belirleyenlerinin çarpımına eşitir: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

Bir Dizeyin Derecesi
Bir dizeyin *"derecesi"* (rank), belirleyeni sıfır olmayan en büyük alt dizeyinin boyutudur.

- Örnek olarak, aşağıda verilen dizeyin 1. satırının 2. ve 3. satırların doğrusal bir birleşimi olduğu görülmektedir:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Buna göre, $\mathbf{A}$ tekil bir dizeydir ve $|\mathbf{A}| = 0$ olmaktadır.

- Diğer taraftan, $\mathbf{A}$'nın derecesi 2'dir çünkü 2×2 boyutlu altdizeylerinden birinin belirleyeni sıfırdan farklıdır:

$$\mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Minör
$N \times N$ boyutundaki bir $\mathbf{A}$ dizeyinin i'inci satırı ile j'inci sütunu silinirse, kalan altdizeyin belirleyenine a_{ij} öğesinin *"minörü"* (minor) denir ve $|\mathbf{M}_{ij}|$ ile gösterilir.

- Örnek olarak aşağıda verilen dizeyi ele alalım:

$$\mathbf{A}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Burada a_{11}'in minörü şudur:

$$|\mathbf{M}_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

Eşçarpan
$N \times N$ boyutlu bir $\mathbf{A}$ dizeyinin a_{ij} öğesinin *"eşçarpanı"* (cofactor) şöyle tanımlanır: $c_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{M}_{ij}|$

- Bir başka deyişle eşçarpan işaretli bir minördür ve işareti de $(i + j)$ toplamı çiftse artı, tekse eksidir.

Eşçarpan Dizeyi
$\mathbf{A}$'nın *"eşçarpan dizeyi"* (cofactor matrix), a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak elde edilir ve (cof $\mathbf{A}$) ile gösterilir.

Ek Dizey
"Ek dizey" (adjoint matrix), eşçarpan dizeyinin devriğidir ve (adj $\mathbf{A}$) ile gösterilir.

Dizey Tersi Hesaplama
$\mathbf{A}$ tekil olmayan ($|\mathbf{A}| \neq 0$) bir dizeyse, $\mathbf{A}^{-1}$ *"ters"* (inverse) dizeyi şu şekilde bulunur:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}(\mathsf{adj}\mathbf{A})$$

Dizey tersi hesaplama işleminin adımları aşağıdaki gibidir:

1. $\mathbf{A}$'nın belirleyeni hesaplanır.
2. $\mathbf{A}$'nın a_{ij} öğelerinin yerine eşçarpanları koyularak eşçarpan dizeyi (cof $\mathbf{A}$) elde edilir.
3. Eşçarpan dizeyin devriği alınarak ek dizey (adj $\mathbf{A}$) bulunur.
4. Son olarak ek dizeyin tüm öğeleri $|\mathbf{A}|$'ya bölünür.

Dizeylerde Türev Alma
Dizeylerde türev almaya ilişkin iki önemli kural şunlardır:

1. Eğer $\mathbf{a}'$ $1 \times N$ boyutunda bir satır yöneyi ve $\mathbf{x}$ de $N \times 1$ boyutlu bir sütun yöneyi ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

2. Eğer $\mathbf{A}$ $N \times N$ boyutunda bir kare dizeyse, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}'\mathbf{A}$$

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Appendix B* “Rudiments of Matrix Algebra” okunacak.

Önümüzdeki Ders
Doğrusal Bağlanım Modeline Dizey Yaklaşımı

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011