Bölüm 6

İki Değişkenli Bağlanım Modeli - Çıkarsama Sorunu

6.1 Aralık Tahmini

6.1.1 Bazı Temel Noktalar

- Yansız SEK tahmincilerinin ürettiği tahminlerin anakütle değerlerine eşit olması beklenir.
- Ancak, örneklemlerin rastsallığı nedeniyle sonuçların gerçek değerlerden farklı çıkabileceği de bir gerçektir.
- Hata teriminin normalliği varsayımı altında $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ve $\hat{\sigma}^2$ tahmincilerinin dağılımları ile ilgili şu bilgileri anımsayalım:

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1})$$
$$\hat{\beta}_2 \sim N(\beta_2, \sigma^2_{\hat{\beta}_2})$$
$$Z = (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

- Rastsallık etmeni nedeniyle tahminlerin gerçek değerlerine ne kadar yakın olduğunu bilmek isteriz.
- Öyleyse, yalnızca nokta tahminine güvenmek yerine onun iki yanında öyle bir aralık oluşturalım ki anakütlenin gerçek katsayısını belli bir olasılıkla içersin:

$$P(\hat{\beta} - \delta \leq \beta \leq \hat{\beta} + \delta) = 1 - \alpha$$

- Buradaki
  $0 < \alpha < 1$'e *"anlamlılık düzeyi"* (significance level),
  $1 - \alpha$'ya *"güven katsayısı"* (confidence coefficient),
  $\hat{\beta} - \delta$'ya *"alt güven sınırı"* (lower confidence limit),
  $\hat{\beta} + \delta$'ya ise *"üst güven sınırı"* (upper confidence limit)
  adı verilir.

Aralık tahminine ilişkin bazı önemli noktalar şunlardır:

- Tanımlanan aralık rastsal bir aralıktır ve bir örneklemden diğerine değişecektir.
- Eğer $\alpha = 0{,}05$ ise, tanımlanan rastsal aralığın gerçek β değerini içerme olasılığı 0,95 ya da %95'tir.
- Belli bir örneklem alınarak bulunan sabit aralığın gerçek β'yı içerme olasılığının ise $(1 - \alpha)$ olduğu söylenmez.
- Çünkü, böyle bir durumda β ya bu aralığın içindedir ya da dışındadır. Diğer bir deyişle olasılık ya 1'dir ya da 0'dır.

6.1.2 SEK Tahmincilerinin Güven Aralıkları

β_1 ve β_2 İçin Güven Aralığı

- Hata teriminin normalliği varsayımı altında $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincilerinin normal dağılımlı olduğunu biliyoruz.
- Öyleyse, bir ölçünlü normal değişken olan Z'yi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$Z = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\text{öh}(\hat{\beta}_2)} = \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\sigma}$$

- Demek ki anakütlenin gerçek varyansı σ^2 biliniyorsa, β_2'yi incelemek için normal dağılımdan yararlanılabilir.
- Ancak, σ^2 genellikle bilinemediği için uygulamada yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.
- σ^2 bilinmediği zaman bunun yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ aşağıda gösterilen şekilde kullanılır:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\sigma} \\ Z_2 &= (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \\ t &= \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/(n-2)}} \\ &= \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\hat{\sigma}} \end{aligned}$$

- Demek ki, normal dağılan Z_1'in ki-kare dağılan Z_2'nin kendi serbestlik derecesine bölümünün kareköküne bölünmesi ile elde edilen t rastsal değişkeni, $n-2$ sd ile t dağılımlıdır.
- Bu işlem β_1 için öh$(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\sum X_i^2 / n \sum x_i^2}\sigma$ olması dışında benzerdir.
- Normal dağılım yerine t dağılımı kullanıldığı zaman β_1 için güven aralığı aşağıdaki gibi kurulur:

$$\begin{aligned} P(-t_{\alpha/2} \le t \le t_{\alpha/2}) &= 1-\alpha \\ P\left[-t_{\alpha/2} \le \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\text{öh}(\hat{\beta}_1)} \le t_{\alpha/2}\right] &= 1-\alpha \end{aligned}$$

- Buradaki $t_{\alpha/2}$ değeri, $\alpha/2$ anlamlılık düzeyinde ve $(n-2)$ serbestlik derecesi için t dağılımından bulunan t değeridir.
- Bu $t_{\alpha/2}$ değerine $\alpha/2$ anlamlılık düzeyindeki *"kritik t değeri"* (critical t value) adı verilir.
- Normal dağıldığı bilinen β_2'nin güven aralığı da benzer şekilde bulunur.
- β_1 ve β_2'nin $\%100(1-\alpha)$ güven aralıkları kısaca aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$\begin{gathered} \hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2}\text{öh}(\hat{\beta}_1) \\ \hat{\beta}_2 \pm t_{\alpha/2}\text{öh}(\hat{\beta}_2) \end{gathered}$$

- Her iki durumda da güven aralığının genişliği tahmincinin ölçünlü hatası ile doğru orantılıdır.
- Zaman zaman β_1 ve β_2 için bir *"birleşik güven aralığı"* (joint confidence interval) kurmak gerekli olabilir. Bu durum daha sonraki konularda ele alınacaktır.

σ^2 İçin Güven Aralığı

- Normallik varsayımı altında $(n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ şeklinde tanımlanan değişkenin $n-2$ sd ile ki-kare dağılımlı olduğunu biliyoruz.
- Bu bilgiden yararlanarak σ^2'nin güven aralığını bulabiliriz:

$$
\begin{aligned}
P(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}) &= 1-\alpha \\
P\left[(n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right] &= 1-\alpha
\end{aligned}
$$

- Bu güven aralıklarının yorumu şudur: Farklı örneklemler kullanarak σ^2 ve β'lar için $\%100(1-\alpha)$ güven sınırları bulur ve gerçek değerlerin bu sınırlar içinde olduğunu söylersek, her 100 seferde $100(1-\alpha)$ kez haklı çıkarız.

6.2 Önsav Sınaması

6.2.1 Güven Aralığı Yaklaşımı

Önsav sınaması konusu ile ilgili bazı önemli noktalar şunlardır:

- Önsav sınaması, verili bir gözlem ya da bulgunun belli bir önsav ile uyuşup uyuşmadığı sorusu ile ilgilenir.
- Buradaki uyuşmak sözcüğü, önsavdaki değere bu önsavı reddetmemeyi sağlamaya yetecek derecede yakın olmak anlamındadır.
- İleri sürülen önsava H_0 ya da *"sıfır önsavı"* (null hypothesis) denir ve H_1 ile gösterilen *"almaşık önsav"* (alternative hypothesis) karşısında sınanır.
- Almaşık önsav *"basit"* (simple) ya da *"bileşik"* (composite) olabilir. Eğer belli bir değer öne sürülüyor ise önsav basittir.
- Örnek olarak
  $H_1 : \beta_1 = 3$ basit,
  $H_1 : \beta_1 \geq 3$ bileşik,
  $H_1 : \beta_1 \neq 3$ ise yine bir bileşik önsavdır.
- Önsav sınamasına birbirini karşılıklı tamamlayıcı iki farklı yaklaşım vardır.
- Bu yaklaşımlar *"güven aralığı"* (confidence interval) ve *"anlamlılık sınaması"* (test of significance) yaklaşımlarıdır.
- Güven aralığı yaklaşımı için karar kuralı aşağıdaki gibidir:

Güven Aralığı Karar Kuralı
Sınanacak katsayı için $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı belirlenir. Eğer katsayı bu güven aralığının içinde ise H_0 reddedilmez. Katsayı eğer güven aralığının dışında kalıyorsa H_0 reddedilir.

- Örnek olarak, serbestlik derecesi 11 ve ölçünlü hatası 0,1 olan ve $\hat{\beta}_2 = 0{,}5$ olarak tahmin edilen katsayı için şunu ileri sürdüğümüzü düşünelim:

$$H_0 : \beta_2 = 0{,}8$$
$$H_1 : \beta_2 \neq 0{,}8$$

- Almaşık önsava göre β_2 0,8'den küçük ya da büyük olabilir. Dolayısı ile bu *"çift kuyruklu"* (two tailed) bir sınamadır.

- Gözlemlenen $\hat{\beta}_2$'nın H_0 ile uyumlu olup olmadığını bulmak için β_2'ye ait %95 güven aralığını oluşturalım:

$$0{,}28 \leq \beta_2 \leq 0{,}72$$

- $0{,}8$ değeri, %95 güven aralığının dışında kalmaktadır.
- Buna göre gerçek β_2'nin 0,8 olduğu önsavını %95 güvenle reddederiz.

Tek Kuyruklu Güven Aralığı

- Zaman zaman almaşık önsavın iki yanlı yerine tek yanlı olduğu yönünde önsel bilgi ya da kuramsal beklentilerimiz olabilir.
- Bu durumda güven aralığı *"tek yanlı"* (one sided) ya da *"tek kuyruklu"* (one tailed) olarak aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\beta \geq \hat{\beta} - t_\alpha \text{öh}(\hat{\beta}) \qquad \text{ya da} \qquad \beta \leq \hat{\beta} + t_\alpha \text{öh}(\hat{\beta})$$

- Güven aralığının tek-kuyruklu mu yoksa çift-kuyruklu mu oluşturulacağı almaşık önsavın belirleniş biçimine bağlıdır.
- Tek kuyruklu sınamaya örnek olarak, serbestlik derecesi 11 ve ölçünlü hatası 0,1 olan $\hat{\beta}_2 = 0{,}5$ için β_2'nin 0,8'den küçük olduğu kanısında olduğumuzu varsayalım.
- Bu durumda sıfır önsavı ve almaşık önsav şöyle seçilir:

$$H_0 : \beta_2 \geq 0{,}8 \; H_1 : \beta_2 < 0{,}8$$

- Burada dağılımının sol kuyruğunu göz önüne almaya gerek olmadığı için $1-\alpha$ güven aralığı $(-\infty,\ \hat{\beta}_2 + t_\alpha \text{öh}(\hat{\beta}_2)]$ olur.
- Tek kuyruklu %95 güven aralığı aşağıdaki gibi bulunur:

$$-\infty \leq \beta_2 \leq 0{,}6796$$

- 0,8 değeri %95 tek yanlı güven aralığının dışında olduğuna göre gerçek β_2'nin 0,8'den büyük ya da 0,8'e eşit olduğu sıfır önsavını %95 güvenle reddedebiliriz.

6.2.2 Anlamlılık Sınaması Yaklaşımı

- Anlamlılık sınaması yaklaşımı güven aralığı yaklaşımını tamamlayıcı ve ona benzer bir süreçtir.
- Normallik varsayımı altında

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\text{öh}(\hat{\beta})}$$

 değişkeninin $(n-2)$ sd ile t dağılımına uyduğunu biliyoruz.

- Eğer sıfır önsavı altında sınanmak üzere belli bir β^* değeri seçilmiş ise, yukarıdaki t değeri örneklemden kolayca hesaplanabilir ve bir sınama istatistiği görevi görebilir.
- Anlamlılık sınaması yaklaşımındaki sınama istatistiği t dağılımlı olduğuna göre şu güven aralığını yazabiliriz:

$$P\left[-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta} - \beta^*}{\text{öh}(\hat{\beta})} \leq t_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha \tag{6.1}$$

$$|\hat{\beta} - \beta^*| \leq t_{\alpha/2}\text{öh}(\hat{\beta}) \tag{6.2}$$

- β^* burada H_0 altındaki β'dır. $t_{\alpha/2}$ ise $(\alpha/2)$ anlamlılık düzeyinde ve $(n-2)$ sd ile t çizelgesinden okunan kritik değerdir.
- Anlamlılık sınaması yaklaşımına bir örnek olarak σ^2'yi ele alalım:

$$\chi^2 = (n-2)\tfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^{2*}}$$

- Yukarıda gösterilen değişkenin $(n-2)$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına uyduğunu biliyoruz.
- $n = 13$ ve $\hat{\sigma}^2 = 40$ verili olsun.
- $H_0 : \sigma^{2*} = 50$ önsavını sınamak için önce aşağıdaki ki-kare değeri hesaplanır.

$$\chi^2 = (13-2)\tfrac{40}{50} = 8{,}8$$

- 11 serbestlik derecesi ile ve anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ için $\chi^2_{0{,}975} = 3{,}82$ ve $\chi^2_{0{,}025} = 21{,}92$'dir.
- Hesaplanan χ^2 değeri yukarıdaki iki değer arasında kaldığı için sıfır önsavı reddedilmez.

t sınaması karar kuralları aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Çizelge: t Anlamlılık Sınaması Karar Kuralları

Önsav Türü	Sıfır önsavı	Almaşık önsav	H_0 ret kuralı
Çift Kuyruk	$\beta = \beta^*$	$\beta \neq \beta^*$	$\lvert t\rvert > t_{\alpha/2,\text{sd}}$
Sağ Kuyruk	$\beta \leq \beta^*$	$\beta > \beta^*$	$t > t_{\alpha,\text{sd}}$
Sol Kuyruk	$\beta \geq \beta^*$	$\beta < \beta^*$	$t < -t_{\alpha,\text{sd}}$

- *Dikkat:* İki değişkenli model için sd $= (n-2)$'dir.

6.2.3 Anlamlılık Konusu

Bir Önsavı Reddetmemenin Anlamı

- Bir anlamlılık sınamasına dayanarak sıfır önsavının desteklenmesi demek, aslında, örneklem verilerine dayanarak bu önsavı reddedecek bir neden olmadığı anlamına gelir.
- Örnek olarak gerçek $\beta = 0{,}5$ olduğunu varsayalım.
- Verilere dayanarak burada $H_0 : \beta = 0{,}4$ ve $H_0 : \beta = 0{,}5$ gibi farklı önsavlar ileri sürmek olasıdır.
- Ancak bu önsavlardan hangisinin doğru olduğu bilinemez.
- Bu nedenle, tıpkı bir mahkemenin "suçsuzdur" yerine "beraat etmiştir" demesi gibi "kabul ederiz" yerine "reddedemeyiz" sonucuna varmalıyız.

$\beta_2 = 0$ Sıfır Önsavı ve 2t Yöntemi

- Görgül çalışmalarda $H_0 : \beta_2 = 0$ önsavı sıklıkla sınanır.
- Burada amaç Y'nin açıklayıcı değişken X ile ilişkisi olup olmadığına karar vermektir.
- $H_0 : \beta_2 = 0$ sıfır önsavını sınamada *"2t başparmak kuralı"* (2t rule of thumb) kullanılabilir:

2t Yöntemi
Serbestlik derecesi 30 ya da daha fazla ise, anlamlılık düzeyi $\alpha = 0{,}05$ iken bulunan $t = \hat{\beta}_2/\text{öh}(\hat{\beta}_2)$, mutlak değer olarak eğer 2'den büyükse, $\beta_2 = 0$ sıfır önsavı reddedilir.

- Bunun nedeni, sd>30 olduğunda, t dağılımındaki alanın yüzde 95'ten büyük bölümünün $(-2, 2)$ değerleri arasında yer almasıdır. Bu durum t çizelgesinden de görülebilir.
- $H_0 : \beta_2 = 0$'a karşı $\beta_2 < 0$ ya da $\beta_2 > 0$ tek yanlı sınamaları için ise kullanılacak değer 2 değil 1,7'dir.

Anlamlılık Düzeyinin Seçimi

- Uygulamada anlamlılık düzeyi α çoğu zaman $\%1$, $\%5$ ya da en çok $\%10$ olarak seçilmektedir.
- Aslında bu değerlerin yerine başka herhangi bir değer de aynı işi görebilir.
- H_0'ı kabul ya da ret kararı verilirken iki tür hata yapılabilir:

I. Tür Hata:	Aslında doğru olan H_0'ı reddetmek.
II. Tür Hata:	Aslında yanlış olan H_0'ı reddetmemek.

- Örneklem büyüklüğü veriliyken, I. tür hata yapma olasılığı azaltılmak istenirse II. tür hata yapma olasılığı artar. Eğer II azaltılırsa bu sefer de I artar.
- Anlamlılık düzeyi seçimindeki klasik yaklaşım, uygulamada I. tür hatanın II. türe göre daha ciddi olduğudur.
- Dolayısıyla, $\alpha = 0{,}01$ ya da $\alpha = 0{,}05$ seçilerek I. tür hata yapma olasılığı olabildiğince düşük tutulur.

Anlamlılığın Kesin Düzeyi

- Önsav sınamasındaki zayıf noktanın α'nın seçimindeki gelişigüzellik olduğunu biliyoruz. *"p-değeri"* (p-value) kavramı, α değerini seçme sorununu ortadan kaldırır:

P değeri
P-değeri ya da *"olasılık değeri"* (probability value), anlamlılığın gözlenen kesin düzeyi ya da I. tür hata yapma olasılığının kesin düzeyinin ölçüsüdür.

- Diğer bir deyişle p değeri, sıfır önsavının reddedilebileceği en düşük anlamlılık düzeyini verir.
- Belli bir örneklem veriliyken $|t|$ büyüdükçe p değeri azalır ve sıfır önsavı da gittikçe artan bir güvenle reddedilebilir.
- Güncel ekonometri yazılımları çeşitli sınama istatistiklerine ilişkin p-değerlerini de hesaplayıp verebilmektedir.

İstatistikte Anlamlılık ve Uygulamada Anlamlılık

İstatistiksel anlamlılık uygulamada anlamlığı gerektirmez. Buna ilişkin olarak Türkiye milli gelir-tüketim örneğimizi anımsayalım:

- Örneklemden elde ettiğimiz $\hat{\beta}_2$ değeri 0,59 idi.
- $\hat{\beta}_2$ için %95 güven aralığı (0,56, 0,63) olarak hesaplanır. Buna göre $\beta_2 = 0{,}64$ sıfır önsavını reddedebiliriz.
- Öte yandan, $\hat{\beta}_2$'yı 0,56 ya da 0,63 almak arasındaki farkın uygulamada önemli olup olmadığı da dikkate alınmalıdır.
- Bu sorunun yanıtı modelden modele değişir.
- Örnek olarak, burada $\hat{\beta}_2$ marjinal tüketim eğilimi MTüE'dir. İktisat kuramına göre yatırım çarpanı ise $1/(1 - \text{MTüE})$'dir.
- Buna göre eğer MTüE $= 0{,}56$ ise çarpan 2,27 olurken MTüE $= 0{,}63$ ise de çarpan 2,70 olacaktır.
- Görüldüğü gibi, bu örnekteki fark hem istatistiksel olarak hem de uygulama açısından önemlidir.

6.3 Çıkarsamaya İlişkin Konular

6.3.1 Varyans Çözümlemesi

- *"Varyans çözümlemesi"* (analysis of variance) ya da kısaca *"VARÇÖZ"* (ANOVA), istatistiksel çıkarsama sorununa tamamlayıcı ve aydınlatıcı bir yaklaşım sunar.

- Aşağıdaki özdeşliği anımsayalım:

$$\begin{aligned} \sum y_i^2 &= \sum \hat{y_i}^2 + \sum \hat{u_i}^2 \\ \sum y_i^2 &= \hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2 + \sum \hat{u_i}^2 \\ \text{TKT} &= \text{BKT} + \text{KKT} \end{aligned}$$

- VARÇÖZ yaklaşımının temelinde TKT'nin bu iki parçasının incelenmesi yatar.

- BKT 1 sd ile ve KKT de iki değişkenli model için $(n-2)$ sd ile ki-kare dağılımlıdır.

- O halde, toplamların kendi sd'lerine bölünmesi ile bulunan *"ortalama kareleri toplamı"* (mean sum of squares) ya da kısaca *"OKT"* (MSS) değerlerini kullanarak şunu yazabiliriz:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\text{BKT'nin OKT'si}}{\text{KKT'nin OKT'si}} \\ &= \frac{(\hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2)/1}{\sum \hat{u_i}^2/(n-2)} \end{aligned}$$

- Yukarıdaki değişken, hata teriminin normalliği varsayımı altında pay 1 ve payda $(n-2)$ sd ile F dağılımına uyar.

- Tanımladığımız F oranından nasıl yararlanabileceğimizi görmek için aşağıdaki eşitliklere bakalım:

$$\begin{aligned} E\left((\hat{\beta}_2^2 \sum x_i^2)/1\right) &= \ldots = \sigma^2 + \beta_2^2 \sum x_i^2 \\ E\left(\sum \hat{u_i}^2/(n-2)\right) &= E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2 \end{aligned}$$

- β_2 ve σ^2 gerçek anakütle katsayılarıdır.
- Eğer β_2 sıfır ise eşitliklerin her ikisi de aynı çıkar.
- Demek ki, F oranı bize $H_0 : \beta_2 = 0$ sıfır önsavını sınamada kullanılabilecek bir sınama istatistiği vermektedir.
- *Dikkat:* Bu durum iki değişkenli bağlanım için geçerlidir. F oranının çoklu bağlanımdaki yorumu farklıdır.

Varyans çözümlemesine örnek olarak, Türkiye gelir-tüketim örneğimize dönelim.

- F değeri 1213,49 olarak hesaplanmaktadır.
- Anlamlılık düzeyi %5 iken, 1 ve 18 sd için kritik F değeri 4,41 olarak verilidir.
- Elimizdeki F istatistiği kritik değerden büyük olduğu için, $\beta_2 = 0$ önsavını reddederek Türkiye'de gelirin, özel tüketim harcamaları üzerinde etkili olduğunu söyleyebiliriz.
- Bu noktada, k sd ile t dağılımına uyan değişkenin karesinin de 1 ve k sd ile F dağılımına uyduğunu da anımsayalım.
- $H_0 : \beta_2 = 0$ altında tahmin edilen t değeri 34,84'tür.
- Yuvarlama hatalarını bir yana bırakırsak $t^2 = (34{,}84)^2 = F$ eşitliğinin geçerli olduğunu görüyoruz.
- Bu nedenle, iki değişkenli bağlanım için F sınamasına aslında gerek yoktur.
- Şimdilik F ve t sınamalarının $\beta_2 = 0$ sınamasının iki farklı ve birbirini tamamlayıcı yolu olduğunu söyleyebiliriz.
- F sınamasının önemini ve farklı uygulamalarını çoklu bağlanım konusu içerisinde ele alacağız.

6.3.2 Kestirim Sorunu

Ortalama Kestirimi

- Örneklem katsayıları yanında tekil $\hat{Y}_i$ değerleri için de aralık tahmini ve önsav sınaması yapılabilir.

- Örnek olarak, aşağıdaki örneklem bağlanımına bakalım:

$$\hat{Y}_i = 25 + 2X_i$$

- Katsayı tahminlerine dayanarak $E(Y|X_0 = 100)$ kestirimini yapmak istediğimizi varsayalım.
- Bu *"ortalama kestirimi"* (mean prediction) şöyle bulunur:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_0 \\ &= 25 + 2(100) = 225\end{aligned}$$

- $\hat{Y}_0$ burada $E(Y|X_0)$ tahmincisidir.
- $\hat{Y}_0$'nın, bir tahminci olmasından dolayı, kendi gerçek değerinden farklı çıkması söz konusudur.
- $\hat{Y}_0$ tahmincisinin aşağıda gösterilen ortalama ve varyans ile normal dağılımlı olduğu kanıtlanabilir:

$$E(\hat{Y}_0) = \beta_1 + \beta_2 X_0 \qquad \text{var}(\hat{Y}_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum x_i^2}\right]$$

- Bilinmeyen σ^2 yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ koyulduğunda ise bulunan değişken $(n-2)$ sd ile t dağılımına uyacaktır:

$$t = \frac{\hat{Y}_0 - (\beta_1 + \beta_2 X_0)}{\text{öh}(\hat{Y}_0)}$$

- Öyleyse, t dağılımını kullanarak $E(Y_0|X_0)$ güven aralığını bulabilir ve bunu önsav sınaması yapmada kullanabiliriz.
- $E(Y_0|X_0)$ güven aralığının tüm X'ler için hesaplanması ile anakütle bağlanım işlevine ilişkin bir *"güven kuşağı"* (confidence band) elde edilebilir.
- Bu güven kuşağı $X_0 = \bar{X}$ olduğunda en dar noktadadır. X_0 değeri $\bar{X}$'den uzaklaştıkça kemer de genişler.
- Dolayısıyla, örneklem ortalaması $\bar{X}$'den uzaklaşıldıkça örneklem bağlanımının kestirim yeteneği de azalacaktır.

6.3.3 Bağlanım Bulgularının Değerlendirilmesi

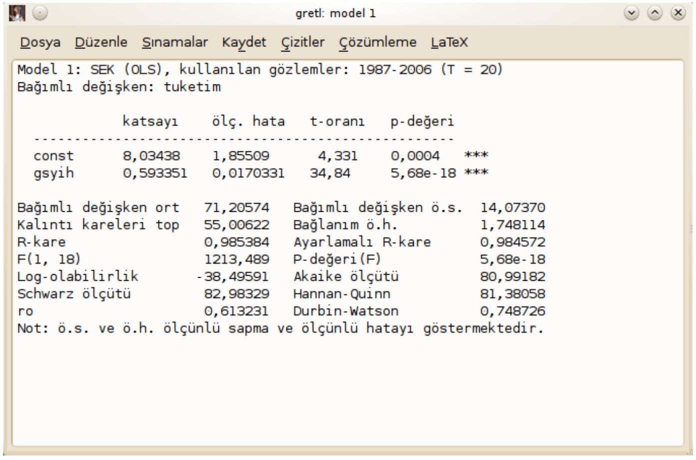
Verilere yakıştırılan model sonuçları yorumlanırken aşağıdaki üç ölçüt göz önüne alınmalıdır:

1. Tahmin edilen katsayıların işaretlerinin kuramsal ya da önsel bilgilere dayalı beklentilerle uyumluluğu,

2. Kuramsal ilişkinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı,

3. Bağlanım modelinin güvenilirliği ve kuramsal ilişkiyi açıklayabilme derecesi.

Türkiye gelir-tüketim örneği için gretl bağlanım çıktısı şöyledir:



Bağlanım bulgularını incelediğimizde şunları görürüz:

- Keynesci tüketim kuramı çerçevesinde β_1 otonom tüketimi, β_2 ise marjinal tüketim eğilimi MTüE'yi göstermektedir.

- Sıfır gelir gerçek hayatta gözlenen bir durum olmadığı için β_1'e otonom tüketim anlamı yüklemekten kaçınılmalıdır.

- β_2 ise önsel beklentilere uygun şekilde 1'den küçük ve 0,59 olarak tahmin edilmiştir. Buna göre, Türkiye'de milli gelir 1 TL arttığında tüketim de 59 kuruş artmaktadır.

- t istatistikleri ilgili anakütle değerinin sıfır olduğu varsayımı altında bulunmuştur. β_2 için $34{,}84 = 0{,}59335/0{,}017033$'tür.

- $\hat{\beta}_2$'ya ait p-değeri de 18 sd ile 34,84 ya da daha yüksek bir t değeri bulma olasılığını $5{,}68 \times e^{-18}$ olarak vermektedir. Demek ki MTüE'nin sıfırdan farklı olduğunu söyleyebiliriz.

- Yaklaşık 0,98 büyüklüğündeki r^2 değeri, özel tüketim harcamalarındaki değişimin %98 oranında milli gelirdeki değişim ile açıklanabildiğini söylemektedir.

- Bağlanım sonuçlarının güvenilir olduğuna karar verebilmek için modelimizin KNDBM varsayımlarını sağladığını da onaylamak zorundayız.

- Şu an tüm KNDBM'nin varsayımlarını denetleyemesek de u_i hata teriminin normalliği varsayımına bakabiliriz.

- Yazında çeşitli normallik sınamaları bulunmaktadır. Biz bunlardan ki-kare *"yakışmanın iyiliği"* (goodness of fit) ve Jarque-Bera normallik sınamalarını ele alacağız.

- Bu sınamaların ikisi de $\hat{u}_i$ kalıntılarını ve ki-kare olasılık dağılımını temel almaktadır.

χ^2 Yakışmanın İyiliği Sınaması

χ^2 yakışmanın iyiliği sınamasının adımları şöyledir:

1. Bağlanım işlevi bulunur ve $\hat{u}_i$ kalıntıları elde edilir.

2. $\hat{u}_i$'nın örneklem ölçünlü sapması hesaplanır.

3. Örneklem büyüklüğüne göre bir *"kap"* (bin) sayısı belirlenir. Kalıntılar büyüklük sırasına sokulur ve sıfırdan kaç ölçünlü sapma uzaklıkta olduklarına göre bu kaplara bölüştürülür.

4. Gözlenen sıklıklar (G_i) ile normal dağılım için beklenen sıklıklar (B_i) arasındaki farkların kareleri alınır, beklenen sıklıklara bölünür ve bunların toplamı hesaplanır:
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(G_i - B_i)^2}{B_i}$$
k = kap sayısı iken, yukarıdaki değişken $(k - 3)$ (normal dağılıma karşı sınadığımız için) sd ile χ^2 dağılımına uyar.

5. Eğer p değeri yüksekse H_0 : normallik önsavı reddedilmez.

Jarque-Bera Normallik Sınaması

JB sınaması bir *"kavuşmazsal"* (asymptotic) ya da büyük örneklem sınamasıdır. Şu şekilde yapılır:

1. Öncelikle SEK kalıntılarının *"çarpıklık"* (skewness) ve *"basıklık"* (kurtosis) ölçüleri bulunur.

2. Daha sonra aşağıdaki istatistik hesaplanır:

$$JB = n\left[\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right]$$

   Burada S çarpıklığı, K ise basıklığı göstermektedir. Jarque ve Bera, 1987 tarihli bir çalışmalarında, kalıntıların normal dağıldığı varsayımı altında JB istatistiğinin büyük örneklemde 2 sd ile χ^2 dağılımlı olduğunu göstermişlerdir.

3. Eğer hesaplanan sınama istatistiğine ait p değeri yüksekse H_0 : normallik önsavı reddedilmez.

- Ki-kare sınamasının çekici yanı, *"yığınsal dağılım işlevi"* (cumulative distribution function) hesaplanabilen her türlü dağılım için yakışmayı sınamak için kullanılabilmesidir.
- Sakıncası ise kap sayısının nesnel bir ölçütü olmadığı için hesaplanan χ^2 değerinin farklılık gösterebilmesidir.
- SEK yönteminin istatistiksel özelliklerinden dolayı, büyük örneklemlerde normallik sınaması çoğu zaman gerekmez.
- Bağlanım ile ilgili olarak normallik sınaması daha çok bir küçük örneklem konusudur.
- Diğer yandan, JB kavuşmazsal bir sınama olduğu için küçük örneklemlerde ki-kare dağılımından sapmaktadır.
- Örnek olarak, $n = 70$ gibi çok da küçük sayılamayacak örneklemlerde bile bulunan JB p değeri yanıltıcı olabilir.
- Bu yüzden Jarque-Bera yerine Doornik-Hansen sınaması yazın *"literature"* içinde yeğlenmektedir.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 5* “Two-Variable Regression: Interval Estimation and Hypothesis Testing” okunacak.

Önümüzdeki Ders
İki Değişkenli Doğrusal Bağlanım Modelinin Uzantıları

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011