Bölüm 5

Normallik Varsayımı ve Ençok Olabilirlik Yöntemi

5.1 Normallik Varsayımı ve İlişkin Dağılımlar

5.1.1 Hata Teriminin Olasılık Dağılımı

Ekonometrik çözümlemede amaç yalnızca ÖBİ'yi hesaplamak değil, aynı zamanda ABİ'ye ilişkin çıkarsama ve çeşitli önsav sınamaları da yapabilmektir. Bu doğrultuda u_i hatalarının olasılık dağılımının bilinmesi ya da belirlenmesi iki nedenden dolayı önemlidir:

1. SEK bir katsayı hesaplama yöntemidir. ÖBİ'den ABİ'ye yönelik çıkarsama yapmada tek başına işe yaramaz.

2. $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ tahmincileri Y'nin doğrusal işlevi ve Y'nin kendisi de u_i'lerin bir doğrusal işlevidir. Öyleyse, $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$'nın örneklem dağılımları u_i'lerin olasılık dağılımına ilişkin varsayımlara dayanmaktadır.

- Daha önce ele alınan klasik doğrusal bağlanım modeli (KDBM), u_i hata teriminin olasılık dağılımı ile ilgili herhangi bir varsayımda bulunmaz.

- Almaşık olarak, *"Klasik Normal Doğrusal Bağlanım Modeli"* (Classical Normal Linear Regression Model) ya da kısaca *"KNDBM"* (CNLRM) ise u_i'lerin normal dağıldığını varsayar.

Normallik Varsayımı

KNDBM, her bir u_i'nin aşağıdaki değerlerle normal dağıldığı varsayımını getirir:

Ortalama:	$E(u_i) = 0$	
Varyans:	$E[u_i - E(u_i)]^2 = E(u_i^2) = \sigma^2$	
Kovaryans:	$\text{cov}(u_i, u_j) = 0,$	$i \neq j$

- Bu varsayımlar kısaca $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ şeklinde de gösterilir.
- Buradaki ($\sim$), *"dağılımlı"* (distributed) anlamına gelir. N ise normal dağılımı göstermektedir.
- İki rastsal değişkenin kovaryansının sıfır olması bu iki değişkenin bağımsız olduğunu gösterir.
- Bu nedenle $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ yerine $u_i \sim \text{NBD}(0, \sigma^2)$ de yazılabilir.
- Burada NBD *"normal ve bağımsız dağılımlı"* (normally and independently distributed, kısaca NID) demektir.

Normallik varsayımının nedenleri şunlardır:

1. Merkezi limit kanıtsavına göre bağımsız ve özdeş dağılımlı (BÖD) rastsal değişkenlerin toplam dağılımı, değişken sayısı sonsuza yaklaştıkça normale yakınsar.
2. Merkezi limit kanıtsavına göre değişken sayısı çok fazla olmasa ya da değişkenler tam bağımsız dağılmasalar bile toplamları normal dağılabilir.
3. Normal dağılan değişkenlerin doğrusal işlevleri de normal dağılır. (*Örnek:* $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\sigma}^2$)
4. Normal dağılım yalnızca iki katsayı (ortalama ve varyans) içeren basit, istatistiksel özellikleri iyi bilinen bir dağılımdır.

Normallik Varsayımı Altında SEK Tahmincileri

$\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincileri ile $\hat{\sigma}^2$ varyans tahmini, normallik varsayımı altında şu istatistiksel özellikleri taşırlar:

1. Yansızdırlar. Diğer bir deyişle beklenen değerleri gerçek değerlerine eşittir. *Örnek:* $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$.
2. $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ tahmincileri, doğrusal ve doğrusal-dışı tüm yansız tahminciler içinde enaz varyanslıdır.
3. Tutarlıdırlar. Örneklem sonsuza doğru büyürken gerçek değerlerine yakınsarlar.

4. $\hat{\beta}_1$ şöyle dağılır: $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1})$.
5. $\hat{\beta}_2$ şöyle dağılır: $\hat{\beta}_2 \sim N(\beta_2, \sigma^2_{\hat{\beta}_2})$.
6. $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ tahmincileri $\hat{\sigma}^2$'dan bağımsız olarak dağılırlar.
7. $(n-2)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ değeri ise $n-2$ sd ile χ^2 dağılımlıdır. Bu bilgi, σ^2'ye ilişkin çıkarsamalarda $\hat{\sigma}^2$'den yararlanabilmek içindir.

- Normallik varsayımı yardımı ile $\hat{\beta}_1$ (normal), $\hat{\beta}_2$ (normal) ve $\hat{\sigma}^2$ (ki-kare ile ilgili) örneklem dağılımı bilgilerine ulaşıyoruz.
- Bu durum güven aralıklarını belirlemek ve önsav sınaması yapabilmek için önemlidir.
- *Dikkat:* Y_i'ler u_i'lerin bir işlevi olduğuna göre, $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsayımı altında $Y_i \sim N(\beta_1 + \beta_2 X_i, \sigma^2)$ olur.

5.1.2 Normal Dağılıma İlişkin Dağılımlar

- F, t ve ki-kare (χ^2) olasılık dağılımları temelde normal dağılımla ilişkilidirler.
- Bu dağılımların normal dağılımla ilişkilerini özetleyen yedi kanıtsav bulunmaktadır.
- Bu kanıtsavların uygulamadaki önemi büyüktür. Yararları ileride daha iyi anlaşılacaktır.

Kanıtsav 1
$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ değişkenleri $Z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ olan normal ve bağımsız dağılımlı rastsal değişkenler olsun. Bu durumda $Z = \sum k_i Z_i$ toplamı da aşağıda verilen ortalama ve varyans ile normal dağılır.

$$E(Z) = \sum k_i \mu_i$$
$$\text{var}(Z) = \sum k_i^2 \sigma_i^2$$

- Kısaca normal rastsal değişkenlerin doğrusal bileşimleri de normal dağılır.
- *Örnek:* $Z_1 \sim N(10, 2)$ ve $Z_2 \sim N(8; 1{,}5)$ varsayalım ve Z rd'si de $Z = 0{,}8Z_1 + 0{,}2Z_2$ olsun. Buna göre Z

$$0{,}8(10) + 0{,}2(8) = 9{,}6 \text{ ortalama ve}$$
$$0{,}64(2) + 0{,}04(1{,}5) = 1{,}34 \text{ varyans ile}$$

$Z \sim N(9{,}6; 1{,}34)$ olur.

Kanıtsav 2
$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ rastsal değişkenleri normal dağılımlı olsun ancak bağımsız olmasın. Bu durumda $Z = \sum k_i Z_i$ toplamı da aşağıda verilen ortalama ve varyans ile normal dağılır.

$$E(Z) = \sum k_i \mu_i$$
$$\text{var}(Z) = [\sum k_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum k_i k_j \text{cov}(Z_i, Z_j), i \neq j]$$

- *Örnek:* $Z_1 \sim N(6,2)$, $Z_2 \sim N(7,3)$, $\text{cov}(Z_1, Z_2) = 0{,}8$ olsun. Z rd'si de $Z = 0{,}6 Z_1 + 0{,}4 Z_2$ olsun. Buna göre Z

$$0{,}6(6) + 0{,}4(7) = 6{,}4 \text{ ortalama ve}$$
$$0{,}36(2) + 0{,}16(3) + 2(0{,}6)(0{,}4)(0{,}8) = 1{,}58 \text{ varyans ile}$$

$Z \sim N(6{,}4; 1{,}58)$ olur.

Kanıtsav 3
$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ değişkenleri $Z_i \sim N(0,1)$ ölçünlü normal ve aynı zamanda bağımsız rastsal değişkenler olsun. Bu durumda $\sum Z_i^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ toplamı da n serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına uyar.

- Kısaca ölçünlü normal dağılımlı bağımsız rd'lerin kareleri toplamı, toplam terim sayısına eşit serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına uyar.
- Bir yazım kolaylığı olarak sd'si k olan χ^2 dağılımı χ_k^2 diye gösterilebilir.
- *Örnek:* $Z_1, Z_2, Z_3 \sim NBD(0,1)$ olsun. Öyleyse şu geçerlidir:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \sim \chi_3^2$$

Kanıtsav 4
$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ değişkenleri her birinin sd'si k_i olmak üzere χ^2 dağılımlı ve bağımsız rastsal değişkenler olsun. Bu durumda bunların toplamı olan $\sum Z_i = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ rastsal değişkeni de sd'si $k = \sum k_i$ olan ki-kare dağılımına uyar.

- *Örnek:* Z_1 ve Z_2, sd'leri sırasıyla 7 ve 9 olan iki bağımsız ki-kare değişkeni olsun. Buna göre $Z_1 + Z_2$ de serbestlik derecesi $7 + 9 = 16$ olan bir χ_{16}^2 değişkenidir.

Kanıtsav 5
$Z_1 \sim N(0,1)$ ölçünlü normal ve Z_2 de Z_1'den bağımsız ve k sd ile χ^2 dağılımına uyan bir rastsal değişken olsun. Bu durumda $t = Z_1/(\sqrt{Z_2/k})$ şeklinde tanımlanan değişken de k sd ile Student t dağılımına uyar.

- Serbestlik derecesi k sonsuza doğru yaklaştıkça Student t dağılımı ölçünlü normal dağılıma yakınsar.
- Bir yazım kolaylığı olarak k sd'li t dağılımı t_k diye gösterilir.

Kanıtsav 6
Z_1 ve Z_2, serbestlik dereceleri sırasıyla k_1 ve k_2 olan ve bağımsız dağılımlı birer ki-kare değişkeni olsun. Bu durumda $F = (Z_1/k_1)/(Z_2/k_2)$ olarak tanımlanan F değişkeni de k_1 pay ve k_2 payda serbestlik derecesi ile F dağılımına uyar.

- Diğer bir deyişle, F değişkeni kendi sd'lerine bölünmüş iki bağımsız χ^2 değişkeni arasındaki oranı gösterir.
- Bir yazım kolaylığı olarak, sd'leri k_1 ve k_2 olan F dağılımlı değişken F_{k_1,k_2} diye gösterilir.

Kanıtsav 7
Serbestlik derecesi k olan t rastsal değişkeninin karesi, pay sd'si $k_1 = 1$ ve payda sd'si $k_2 = k$ ile F dağılımlıdır.

- *Örnek:* $F_{1,4} = (t_4)^2$ 'dir.
- *Örnek:* $(t_{25})^2 = F_{1,25}$ olur.

5.2 Ençok Olabilirlik Yöntemi

5.2.1 Ençok Olabilirlik Yaklaşımı

- İstatistikte tüm anakütleler kendilerine karşılık gelen bir olasılık dağılımı ile tanımlanırlar.
- Sıradan en küçük kareler yöntemi ise özünde olasılık dağılımları ile ilgili herhangi bir varsayım içermez.
- Bu nedenle çıkarsama yapmada SEK tek başına bir işe yaramaz.
- SEK'i genel bir tahmin süreci olarak değil de örneklem bağlanım işlevlerinin katsayılarını bulmada kullanılan bir hesaplama yöntemi olarak görmeliyiz.
- SEK yönteminden daha güçlü kuramsal özellikler gösteren bir diğer nokta tahmincisi ise *"ençok olabilirlik"* (maximum likelihood), kısaca *"EO"* (ML) yöntemidir.
- Ençok olabilirlik yönteminin ardında yatan temel ilke şu beklentidir:

  > "Rastsal bir olayın gerçekleşmesi, o olayın gerçekleşme olasılığı en yüksek olay olmasındandır."

- Bu yöntem 1920'li yıllarda İngiliz istatistikçi Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) tarafından bulunmuştur.
- Ki-kare sınaması, Bayesçi yöntemler ve çeşitli ölçüt modelleri gibi birçok istatistiksel çıkarım yöntemi temelde EO yaklaşımına dayanır.
- EO yöntemini anlayabilmek için elimizde rastsal olarak belirlenmiş bir örneklem ve dağılım katsayıları bilinen farklı anakütle adayları olduğunu varsayalım.
- Bu örneklemin farklı anakütlelerden gelme olasılığı farklı ve bazı ana kütlelerden gelme olasılığı diğerlerine göre daha yüksektir.
- Elimizdeki örneklem eğer bu anakütlelerden birinden alınmışsa, alınma olasılığı ençok olan anakütleden alınmış olduğunu tahmin etmek akılcı bir yaklaşımdır.

Ençok olabilirlik yöntemi kısaca şöyledir:

1. Anakütlenin olasılık dağılımı belirlenir ya da bu yönde bir varsayım yapılır.
2. Eldeki örneklem verilerinin gelmiş olma olasılığının ençok olduğu anakütlenin hangi katsayılara sahip olduğu bulunur.

5.2.2 İkiterimli Dağılım Örneği

Ençok olabilirlik yöntemini daha iyi anlayabilmek için şu basit örneği ele alalım:

- Elimizde, içinde siyah ya da beyaz toplam on top bulunan değişik torbalar olsun.
- Torbadaki siyah top sayısı $i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ olmak üzere 11 farklı torba olasıdır.
- Bu torbalardan birinden *"yerine koyarak"* (with replacement) dört top seçtiğimizi ve S-B-S-B sırasıyla 2 siyah top geldiğini varsayalım.
- Bu sonucun hangi torbadan gelmiş olabileceğini ençok olabilirlik yaklaşımı ile tahmin edelim.
- Elimizdeki soru *"ikiterimli"* (binomial, Bi) dağılım konusudur.
- İkiterimli dağılıma göre, örnek olarak, 8'i siyah olmak üzere içinde 10 top olan bir torbadan yerine koyarak çekilen 4 toptan 2'sinin (belli bir sıra ile) siyah gelme olasılığı şudur:

$$\text{Bi}(2|4, \frac{8}{10}) = \left(\frac{8}{10}\right)^2 \left(1 - \frac{8}{10}\right)^{4-2} = 0{,}0256$$

- Torbadaki siyah top oranı p olsun. Örneğimizde p için 11 farklı değer söz konusudur:

$$p = \{\tfrac{0}{10}, \tfrac{1}{10}, \ldots, \tfrac{10}{10}\}$$

- Bu 11 farklı torba için, 4 toptan 2'sinin siyah gelmesi durumunun gerçekleşme olasılığı şöyle gösterilebilir:

$$\text{Bi}(2|4, p) = p^2(1 - p)^{4-2}$$

Çizelge: Siyah Top Sayısına Göre Olasılığın Aldığı Değerler

Siyah Top Sayısı	Olasılık				
0	$\text{Bi}(2\|4, \frac{0}{10})$	=	$(0)^2(1)^{4-2}$	=	0
1	$\text{Bi}(2\|4, \frac{1}{10})$	=	$(0{,}1)^2(0{,}9)^{4-2}$	=	0,0081
2	$\text{Bi}(2\|4, \frac{2}{10})$	=	$(0{,}2)^2(0{,}8)^{4-2}$	=	0,0256
3	$\text{Bi}(2\|4, \frac{3}{10})$	=	$(0{,}3)^2(0{,}7)^{4-2}$	=	0,0441
4	$\text{Bi}(2\|4, \frac{4}{10})$	=	$(0{,}4)^2(0{,}6)^{4-2}$	=	0,0576
5	$Bi(2\|4, \frac{5}{10})$	=	$(0{,}5)^2(0{,}5)^{4-2}$	=	*0,0625*
6	$\text{Bi}(2\|4, \frac{6}{10})$	=	$(0{,}6)^2(0{,}4)^{4-2}$	=	0,0576
7	$\text{Bi}(2\|4, \frac{7}{10})$	=	$(0{,}7)^2(0{,}3)^{4-2}$	=	0,0441
8	$\text{Bi}(2\|4, \frac{8}{10})$	=	$(0{,}8)^2(0{,}2)^{4-2}$	=	0,0256
9	$\text{Bi}(2\|4, \frac{9}{10})$	=	$(0{,}9)^2(0{,}1)^{4-2}$	=	0,0081
10	$\text{Bi}(2\|4, \frac{10}{10})$	=	$(1)^2(0)^{4-2}$	=	0

- Çizelgeye bakarak eldeki örneklemin ençok olasılıkla siyah top sayısı 5 olan torbadan alınmış olduğunu tahmin ederiz.

5.2.3 İkiterimli Dağılım EO Tahmincisi

Tanımlamış olduğumuz ikiterimli dağılım sorusunu şimdi bir de *"çözümlemesel"* (analytical) olarak ele alalım:

- Elimizde içinde kaç siyah ve beyaz top olduğu bilinmeyen bir torba olsun.
- Torbadaki siyah top oranına $0 \leq p \leq 1$ diyelim.
- İlk örnekte 4 toptan oluşan bir örneklem alınmıştı. Şimdi ise örneklem büyüklüğü n, çıkan siyah top sayısı da k olsun.
- Farklı n ve k sonuçları veren toplam N sayıda bağımsız çekiliş yapalım.
- Ençok olabilirlik yöntemini kullanarak anakütle katsayısı p'yi tahmin etmek istiyor olalım.
- Eldeki sorunun ikiterimli dağılımı ilgilendirdiğini biliyoruz.
- İstatistikte ikiterimli dağılım, "başarı" olasılığı p olan n bağımsız deneyde başarılı olan k'lerin dağılımını gösteren bir kesikli olasılık dağılımıdır.
- Olasılık yoğunluk işlevi şudur:

$$\mathrm{Bi}(k|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{5.1}$$

- Yukarıda verilen OYİ sırasız çekilişler içindir. Matematiksel kolaylık açısından sonuçların belirli bir sırayı izlemesi gerektiğini varsayalım.
- Bu durumda kesikli OYİ şu olur:

$$p^k (1-p)^{n-k} \tag{5.2}$$

- Elimizdeki olasılık yoğunluk işlevi şuydu:

$$\mathrm{Bi}(k|n,p) = p^k (1-p)^{n-k} \tag{5.3}$$

- Toplam N sayıdaki çekiliş için birleşik yoğunluk işlevi:

$$\mathrm{Bi}(k_i|n_i,p) = \mathrm{Bi}(k_1|n_1,p)\,\mathrm{Bi}(k_2|n_2,p)\ldots\mathrm{Bi}(k_N|n_N,p) \tag{5.4}$$

- Her bir n_i ve k_i için, (5.3)'ü (5.4)'te yerine koyalım:

$$\text{Bi}(k_i|n_i, p) = p^{\sum k_i}(1-p)^{\sum n_i - k_i} \tag{5.5}$$

- $n_1, n_2 \ldots n_N$ ve $k_1, k_2 \ldots k_N$ değerleri veriliyken anakütle katsayısı p eğer bilinmiyorsa, yukarıda gösterilen işleve *"olabilirlik işlevi"* (likelihood function) adı verilir:

$$\text{Oİ}(p) = p^{\sum k_i}(1-p)^{\sum n_i - k_i} \tag{5.6}$$

- Adından da anlaşılacağı gibi EO tahmini, verili n_i ve k_i'leri gözleme olasılığını ençoklamaya dayanır.
- Öyleyse, hedefimiz olabilirlik işlevinin *"ençoksal"* (maximal) değerini bulmak olmalıdır.
- Bu da doğrudan bir türev hesabıdır.
- Bir işlev kendi logaritması ile *"tekdüze"* (monotonous) ilişkilidir. Bu nedenle olasılık işlevi yerine *"log-olasılık"* (log-likelihood) işlevini ençoklamak hesap kolaylığı sağlar:

$$\ln \text{Oİ}(p) = \sum_{i=1}^{N} k_i \ln(p) + \sum_{i=1}^{N}(n_i - k_i)\ln(1-p) \tag{5.7}$$

- (5.7) eşitliğinin p'ye göre kısmi türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial p} = \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^{N}(n_i - k_i)\frac{1}{1-p}(-1) = 0 \tag{5.8}$$

- Sadeleştirmelerden sonra, EO tahmincisi $\tilde{p}$ şöyle bulunur:

$$\tilde{p} = \frac{\sum_{i=1}^{N} k_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i} \tag{5.9}$$

- p üzerindeki ($\sim$) *"dalga"* (tilde) imi, bunun bir EO tahmincisi olduğunu göstermek için kullanılmıştır.
- Görülüyor ki EO yöntemi anakütledeki siyah top oranı k değerini, N çekiliş sonunda bulunan siyah top sayısının çekilen toplam top sayısına oranı olarak tahmin etmektedir.

5.3 Açıklayıcı Örnekler

5.3.1 Poisson Dağılımı EO Tahmincisi

EO yöntemine bir örnek olarak Poisson dağılımını ele alalım. Bu kesikli dağılım, verili bir süre ya da uzaysal alan içerisinde bir olayın belirli bir sayıda tekrarlanma olasılığını anlatır. Örnek olarak, 5 dakikalık süre içinde belli bir noktadan geçen araç sayısı Poisson dağılımına uyan bir rastsal değişkendir. Poisson dağılımının genel gösterimi şöyledir:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \tag{5.10}$$

- Burada x olayın gerçekleşme sayısını, λ ise belirli bir süredeki beklenen gerçekleşme sayısını göstermektedir.
- Artı değerli bir gerçel sayı olan λ'ya ait EO tahmincisini bulmak istiyoruz.
- Poisson dağılımının matematiksel gösterimini alalım ve n sayıda gözlem için olabilirlik işlevini aşağıdaki gibi yazalım.

$$\begin{aligned}\text{Oİ}(\lambda) &= f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\dots\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} \\ &= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!} \end{aligned} \tag{5.11}$$

- İki yanlı logaritmasını alarak log-olabilirlik işlevini bulalım.

$$\ln \text{Oİ} = -n\lambda + \sum x_i \ln\lambda - \ln\prod x_i! \tag{5.12}$$

- Log-olabilirlik işlevinin türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial\lambda} = -n + \sum x_i \frac{1}{\lambda} = 0 \tag{5.13}$$

- Yukarıdaki eşitliği λ'ya göre çözersek şunu buluruz:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} \tag{5.14}$$

- Demek ki EO yöntemi λ değiştirgesinin tahmincisini x'in örneklem ortalaması olarak bulmaktadır.

5.3.2 Üstel Dağılım EO Tahmincisi

İkinci bir örnek olarak *"üstel"* (exponential) dağılıma bakalım. Bu sürekli dağılım, olayların belli bir sabit hızda yinelendiği Poisson türü bir süreçteki gerçekleşmeler arası süreyi anlatır. Örnek olarak, belli bir noktadan rastsal olarak geçen araçlar arasında geçen süre üstel dağılıma uyan bir rastsal değişkendir. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk işlevi ise şöyledir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\tfrac{1}{\theta}\right) e^{-x/\theta} \qquad X > 0 \text{ için,} \\ &= 0 \qquad\qquad\quad X \leq 0 \text{ için.} \end{aligned} \tag{5.15}$$

- Burada x süreyi, θ ise dağılıma ait *"hız"* (rate) değiştirgesini göstermektedir.
- Şimdi de θ'nın EO tahmincisini türetmek istiyoruz.
- Baştaki örneklerde yaptığımız gibi, önce n gözlem için olabilirlik işlevini bulalım.

$$\text{Oİ} = \frac{1}{\theta^n} \exp\left(\sum \frac{-x_i}{\theta}\right) \tag{5.16}$$

- Log-olabilirlik işlevini yazalım, türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\ln \text{Oİ} = -n \ln \theta - \sum \frac{x_i}{\theta} \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum \frac{x_i}{\theta^2} = 0 \tag{5.18}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} \tag{5.19}$$

- Demek ki örneklem büyüklüğü n iken θ değiştirgesinin EO tahmincisi $\tilde{\theta} = \sum x_i/n$ olarak bulunmaktadır.

5.3.3 Normal Dağılım EO Tahmincisi

Son olarak, şimdi de $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ iki değişkenli bağlanım modelini EO yöntemi ile tahmin edelim.

- Bunun için önce hata teriminin sıfır ortalama ile normal ve bağımsızca dağıldığını ($u_i \sim NBD(0, \sigma^2)$) varsayalım.

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastsal değişken X'in olasılık yoğunluk işlevi aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{5.20}$$

- Yukarıdaki $\exp$ işlemcisi e üzeri anlamına gelmektedir.

- Hataların $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ olduğunu varsaydığımıza göre $Y_i \sim N(\beta_1{+}\beta_2 X_i, \sigma^2)$'dir. Diğer bir deyişle, Y_i değerleri $\beta_1 + \beta_2 X_i$ ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılırlar.

- Buna göre tek bir Y'nin olasılık yoğunluk işlevi şudur:

$$f(Y|\beta_1 + \beta_2 X, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(Y-\beta_1-\beta_2 X)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{5.21}$$

- Birbirinden bağımsız $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sayıda Y_i'nin ortak olasılık yoğunluk işlevi ise n tekil OYİ'nin çarpımıdır:

$$f(Y_1|\beta_1 + \beta_2 X_1, \sigma^2)\ f(Y_2|\beta_1 + \beta_2 X_2, \sigma^2) \ldots f(Y_n|\beta_1 + \beta_2 X_n, \sigma^2) \tag{5.22}$$

- Elimizdeki n gözlemdeki her bir Y_i ve X_i için (5.21)'i (5.22)'de yerine koyarsak, olabilirlik işlevini buluruz:

$$\text{Oİ}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n\sqrt{2\pi}^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\beta_1-\beta_2 X_i)^2}{\sigma^2}\right\} \tag{5.23}$$

- Bu denklemin doğal logaritmasını alırsak da log-olabilirlik işlevini elde ederiz:

$$\ln \text{Oİ} = -n\ln(\sigma) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Y_i-\beta_1-\beta_2 X_i)^2}{\sigma^2} \tag{5.24}$$

- $\ln \text{Oİ}$ değerini ençoklamak en sondaki terimi enazlamak demektir. Bu da en küçük kareler yaklaşımı ile aynı şeydir.

- Log olabilirlik işlevinin β_1, β_2 ve σ^2'ye göre kısmi türevleri alınırsa şu eşitlikler bulunur:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)(-1) \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)(-X_i) \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2 \tag{5.27}$$

(. . . devam)

- (5.25), (5.26) ve (5.27) sıfıra eşitlenip birlikte çözüldükten sonra ise aşağıdaki EO tahmincileri elde edilir:

$$\tilde{\beta}_1 = \bar{Y} - \tilde{\beta}_2 \bar{X} \tag{5.28}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \tag{5.29}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i{}^2}{n} \tag{5.30}$$

- Görüldüğü gibi u_i'lerin normal dağıldığı varsayımı altında β bağlanım katsayılarının EO ve SEK tahmincileri aynıdır.
- Diğer yandan σ^2 tahminleri farklıdır:

SEK tahmincisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i{}^2}{n-2} \tag{5.31}$$

EO tahmincisi

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i{}^2}{n} \tag{5.32}$$

- Buna göre σ^2'nin SEK tahmincisi yansızken EO tahmincisi aşağı doğru yanlıdır.
- Ancak kavuşmazsal olarak, diğer bir deyişle n sonsuza yaklaştıkça, EO tahmincisi de yansızlaşır.
- Öyleyse, σ^2'nin EO tahmincisi *"kavuşmazsal yansızlık"* (asymptotic unbiasedness) özelliğini taşımaktadır.

Önümüzdeki Dersin Konusu ve Ödev

Ödev
Kitaptan *Bölüm 4* “Classical Normal Linear Regression Model (CNLRM)” okunacak.

Önümüzdeki Ders
İki Değişkenli Bağlanım: Aralık Tahmini ve Önsav Sınaması

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011