

Çoklu Bağlanım – Tahmin Sorunu

Üç Değişkenli Model




Ekonometri 1 – Konu 21
Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

İşbu belge, “Creative Commons Attribution-Non-Commercial ShareAlike 3.0 Unported” (CC BY-NC-SA 3.0) lisansı altında bir açık ders malzemesi olarak genel kullanıma sunulmuştur. Eserin ilk sahibinin belirtilmesi ve geçerli lisansın korunması koşulu ile özgürce kullanılabilir, çoğaltılabilir ve değiştirilebilir. Creative Commons örgütü ve “CC-BY-NC-SA” lisansı ile ilgili ayrıntılı bilgi “<http://creativecommons.org>” adresinde bulunmaktadır. Bu ekonometri ders notları setinin tamamına “<http://www.acikders.org.tr>” adresinden ulaşılabilir.

A. Talha Yalta

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Ekim 2011 

Ders Planı

- 1 Üç Değişkenli Model
 - Gösterim ve Varsayımlar
 - Kısmi Bağlanım Katsayılarının Tahmini

Üç Değişkenli Model

- Önceki bölümlerde bağımlı değişken Y 'nin yalnızca bir açıklayıcı değişken X tarafından etkilendiği varsayılmıştı.
- Ancak iktisat kuramı bu denli basit değildir.
- **Örnek:** Bir mala olan talep yalnızca o malın fiyatına değil; ikame ya da tamamlayıcı malların fiyatına, gelir düzeyine, nüfusa ve diğer değişkenlere de bağlı olabilir.
- **Örnek:** Tüketim harcamaları yalnızca gelir ile değil; kişinin yaşı, eğitim düzeyi, cinsiyeti, toplam serveti ve benzer değişkenler ile de ilişkili olabilir.
- Modele başka değişkenler eklemek bizi çoklu bağlanım çözümlemesine götürür.

Üç Değişkenli Model

- En basit çoklu bağlanım modeli, bir bağımlı ve iki açıklayıcı değişkenden oluşan üç değişkenli bağlanımdır:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

- Burada Y bağımlı değişken, X_2 ve X_3 açıklayıcı değişkenler, u olasılıksal hata terimi, i gözlem no'sudur.
- β_1 , modelde bulunmayan tüm değişkenlerin Y üzerindeki ortalama etkisini gösteren sabit terimdir.
- β_2 ve β_3 'e de **"kısmi bağlanım katsayısı"** (partial regression coefficient) adı verilir.

Kısmi Bağlanım Katsayıları

Üç değişkenli modeldeki kısmi bağlanım katsayılarının anlamı şudur:

- β_2 , X_3 sabit tutulurken X_2 'deki bir birimlik değişmeye karşı Y 'nin beklenen değeri $E(Y|X_2, X_3)$ 'teki değişmeyi ölçer.
- Bir başka deyişle β_2 , X_3 sabitken $E(Y|X_2, X_3)$ 'ün X_2 'ye göre eğimini verir.
- Diğer bir deyişle β_2 , X_2 'deki bir birimlik değişmenin Y üzerindeki X_3 'ten ayrı, net etkisini gösterir.
- β_3 'ün yorumu da benzer şekildedir.

Üç Değişkenli Model Varsayımları

Daha önce KDBM çerçevesinde yapılmış olan varsayımlar, k değişkenli çoklu bağlanım modeli için de geçerlidir:

- 1 Çoklu bağlanım modeli değiştirgelerde doğrusaldır.
- 2 Açıklayıcı değişkenler tekrarlı örneklemlerde değişmez.
- 3 Açıklayıcı değişkenlerde yeterli değişkenlik bulunur.
- 4 Hata teriminin ortalaması sıfırdır: $E(u_i | X_{2i}, X_{3i}, \dots, X_{ki}) = 0$
- 5 Hata teriminin varyansı sabittir: $\text{var}(u_i) = \sigma^2$
- 6 u_i ve X 'ler birbirlerinden bağımsız dağılmaktadır:

$$\text{cov}(u_i, X_{2i}) = \text{cov}(u_i, X_{3i}) = \dots = \text{cov}(u_i, X_{ki}) = 0$$

- 7 “Serisel ilinti” (serial correlation) bulunmamaktadır:

$$\text{cov}(u_i, u_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

- 8 “Model belirtim hatası” (model specification error) yoktur.
- 9 X_2 ile X_3 arasında “tam eşdoğrusallık” (exact collinearity) bulunmamaktadır.

Eşdoğrusallık Kavramı

- X_2 ile X_3 arasında tam doğrusal ilişki olmadığı yönündeki SEK varsayımını anımsayalım.
- “**eşdoğrusal-dışılık**” (non-collinearity) varsayımına göre, aşağıdaki gibi tanımlanan iki değişken doğrusal bağımlıdır:

$$X_{2i} = aX_{3i} \quad \text{ya da} \quad X_{2i} - aX_{3i} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

- Dolayısıyla, X_2 ve X_3 eğer aynı modelde yer alırlarsa tam eşdoğrusal ilişki ortaya çıkar.
- Tam eşdoğrusallık çoklu bağlanımda önemli bir konudur çünkü bu durumda açıklayıcı değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki tekil etkilerini bulmanın yolu yoktur.

Eşdoğrusallık Kavramı

- Tam eşdoğrusallık olması durumunda kısaca elde iki değil bir bağımsız değişken var demektir.
- **Örnek:** $4X_{2i} = X_{3i}$ olsun. Bu durumda üç değişkenli model ikili modele indirgenir:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 (4X_{2i}) + u_i \\ &= \beta_1 + (\beta_2 + 4\beta_3) X_{2i} + u_i \\ &= \beta_1 + \alpha X_{2i} + u_i \end{aligned}$$

- Diğer yandan, eğer $X_{3i} = X_{2i}^2$ ise iki değişken arasındaki ilişki doğrusal değildir. Bu durumda da eşdoğrusal-dışılık varsayımı çiğnenmiş olmaz.

SEK Tahmincileri

- Üç değişkenli modelin SEK tahmincilerini bulmak için önce örneklem bağlanım işlevini aşağıdaki gibi yazalım:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} + \hat{u}_i$$

- SEK yöntemi, anakütle tahmincilerini kalıntı kareleri toplamı ($\sum \hat{u}_i^2$) en küçük olacak biçimde hesaplar:

$$\min \sum \hat{u}_i^2 = \min \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2$$

- Yukarıdaki eşitliği enazlayacak en doğrudan süreç eşitliğin $\hat{\beta}$ 'lara göre türevini almak, bunları sıfıra eşitlemek ve daha sonra eşanlı olarak çözmektir.

SEK Tahmincileri

Üç değişkenli model için SEK yöntemi şu tahmincileri verir:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

- $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$ tahmincileri bakışımıdır ve paydaları aynıdır.
- Demek ki X_2 ile X_3 'ün yerleri değiştirilirse $\hat{\beta}_2$ ile $\hat{\beta}_3$ 'ün de yeri değişir ama bu bağlanım sonuçlarını etkilemez.

Varyans ve Ölçünlü Hatalar

SEK tahmincilerinin varyansları ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\text{var}(\hat{\beta}_1) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_2^2 \sum x_{3i}^2 + \bar{X}_3^2 \sum x_{2i}^2 - 2\bar{X}_2\bar{X}_3 \sum x_{2i}x_{3i}}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \right) \sigma^2$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_{3i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1 - r_{23}^2)}$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sum x_{2i}^2}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1 - r_{23}^2)}$$

- $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ ve $\text{var}(\hat{\beta}_3)$ formüllerinde yer alan r_{23} , X_2 ve X_3 arasındaki örneklem ilinti katsayısı r 'dir.
- Ölçünlü hatalar ise varyansların artı değerli karekökleridir:

$$\text{öh}(\hat{\beta}) = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta})}.$$

Varyans ve Ölçünlü Hatalar

- Varyans ve ölçünlü hata formüllerindeki σ^2 'nin anakütle hata terimi u_i 'nin sabit varyansı olduğunu biliyoruz.
- Bu anakütle katsayısının yansız tahmincisi şöyledir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-3}$$

- σ^2 'nin bu tahmincisi ile iki değişkenli modeldeki tahmincisi ($\sum \hat{u}_i^2 / n - 2$) benzerdir. Aralarındaki tek fark üç değişkenli model için serbestlik derecesinin artık $(n - 3)$ olmasıdır.
- Kalıntılar bulunduğundan sonra $\hat{\sigma}^2$ kolayca hesaplanabilir.
- Kalıntı kareleri toplamı ise şu eşitlik ile kolayca bulunabilir:

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} - \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$$

SEK Tahmincilerinin Özellikleri

Üç değişkenli model için SEK tahmincilerinin özellikleri iki değişkenli model ile aynıdır:

- 1 Üç değişkenli bağlanım doğrusu (düzlemi) \bar{Y} , \bar{X}_2 , \bar{X}_3 ortalamalarından geçer: $\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$
- 2 \hat{Y}_i 'nin ortalaması gözlenen Y_i ortalamasına eşittir: $\bar{\hat{Y}}_i = \bar{Y}_i$
- 3 Kalıntılar toplamı sıfıra eşittir: $\sum \hat{u}_i = n\bar{\hat{u}}_i = \bar{\hat{u}}_i = 0$
- 4 Kalıntılar X_{2i} ve X_{3i} ile ilişkisizdir: $\sum \hat{u}_i X_{2i} = \sum \hat{u}_i X_{3i} = 0$
- 5 \hat{u}_i kalıntıları \hat{Y}_i ile de ilişkisizdir: $\sum \hat{u}_i \hat{Y}_i = 0$
- 6 Varyans formüllerinden görüldüğü gibi, X_2 ile X_3 arasındaki ilişki katsayısı r_{23} artarken $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$ 'nin varyansları yükselir.
- 7 Gözlem sayısı n artarken $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$ 'nin varyansları da azalır.
- 8 $\hat{\beta}_2$ ve $\hat{\beta}_3$ tahmincileri, en iyi doğrusal yansız tahminci ya da kısaca EDYT'dirler.

ÖBİ'nin Sapmalar Biçimi Gösterimi

Çok değişkenli modelde ÖBİ'nin sapmalar biçiminde gösterimi aşağıda gösterilen şekilde elde edilir:

- 1 Üçlü bağlanım modelini ele alalım:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i}$$

- 2 Bağlanım yüzeyi \bar{Y} , \bar{X}_2 , \bar{X}_3 ortalamalarından geçtiği için:

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

- 3 İkinci denklemleri birinciden çıkartırsak şunu buluruz:

$$\begin{array}{r} \hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{3i} \\ \bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 + \hat{\beta}_3 \bar{X}_3 \\ \hline \hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 (X_{2i} - \bar{X}_2) + \hat{\beta}_3 (X_{3i} - \bar{X}_3) \\ \hat{y}_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 x_{3i} \end{array}$$

Ençok Olabilirlik Tahmincileri

- İki değişkenli modelde olduğu gibi çoklu modeller için de bağlanım katsayılarının SEK ve EO tahmincileri aynıdır.
- Ancak üçlü modelde σ^2 'nin SEK tahmincisi $\sum \hat{u}_i^2 / (n - 3)$ iken EO tahmincisi modelde kaç değişken olursa olsun $\sum \hat{u}_i^2 / n$ olarak bulunur.
- Diğer bir deyişle SEK tahmincisi serbestlik derecesini hesaba katarken yanlı EO tahmincisi bunu dikkate almaz.
- Eğer n çok büyükse kuşkusuz EO ve SEK tahmincileri birbirlerine yaklaşırlar.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Çoklu bağlanımda yakışmanın iyiliği