İki Değişkenli Bağlanım Modelinin Uzantıları

Bağlanım Modellerinin İşlev Biçimleri

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 1 – Konu 20

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

1. Bağlanım Modellerinin İşlev Biçimleri
   - Log-Doğrusal Model
   - Yarı-logaritmasal Modeller
   - Evrik ve Log-Evrik Modeller

Bağlanım Modellerinin İşlev Biçimleri

- "Doğrusallık" (linearity) kavramının değişkenlerde doğrusallık ve değiştirgelerde doğrusallık olmak üzere iki ayrı şekilde tanımlandığını anımsayalım.
- KDBM için değiştirgelerde doğrusallık zorunlu olsa da değişkenlerde doğrusallık zorunlu değildir.
- Öyleyse, değişkenlerde doğrusal-dışı ama değiştirgelerde doğrusal olan ya da uygun dönüştürmelerle doğrusal yapılabilen modelleri KDBM ile tahmin etmek olanaklıdır.
- Bu bağlamda ele alacağımız model biçimleri şunlardır:

"Log-doğrusal model" (log-linear model)
"Yarı-logaritmasal model" (semi-logarithmic model)
"Evrik model" (reciprocal model)
"Log-evrik model" (log-reciprocal model)

Log-Doğrusal Model

- "Üstel" (exponential) bağlanım modeli diye adlandırılan aşağıdaki modeli ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$$

- Yukarıdaki gösterim aşağıdaki şekilde doğrusallaştırılabilir:

$$\begin{aligned} \ln Y_i &= \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i \\ &= \alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i \end{aligned}$$

- Bu model, α ve β_2 anakütle katsayılarında doğrusaldır ve SEK yöntemiyle aşağıdaki gibi tahmin edilebilir:

$$Y_i^* = \alpha + \beta_2 X_i^* + u_i$$

- Burada $Y_i^* = \ln Y_i$ ve $X_i^* = \ln X_i$'dir.

Log-Doğrusal Model

- Her iki yanının logaritması alınarak doğrusallaştırılmış modellere "log-doğrusal" (log-linear), "log-log" (log-log) ya da "çifte-log" (double-log) modeller adı verilir.
- Log-doğrusal modeldeki $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincileri, başta gördüğümüz doğrusal modellerde olduğu gibi EDYT'dirler.
- Ancak $\hat{\beta}_1 = \text{antilog}(\hat{\alpha})$ biçiminde tahmin edildiği için $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_1$'nın yanlı bir tahmincisidir.
- Birçok uygulamada sabit terim ikinci derecede önemli olduğundan, $\hat{\beta}_1$'in yanlı olmasına aldırılmayabilir.

Log-Doğrusal Model

Log-doğrusal modelin yaygınlığına yol açan çekici özelliği, β_2 eğim katsayısının Y'nin X'e göre esnekliğini vermesidir:

Doğrusal Model

$$Y_i = \alpha + \beta_2 X_i + u_i$$

Eğim (birim değişim):

$$\frac{dY_i}{dX_i} = \beta_2$$

Esneklik (yüzde değişim):

$$\frac{dY_i/Y_i}{dX_i/X_i} = \frac{dY_i}{dX_i}\frac{X_i}{Y_i} = \beta_2 \frac{X_i}{Y_i}$$

Log-doğrusal Model

$$Y_i = \exp(\alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i)$$

Eğim (birim değişim):

$$\frac{dY_i}{dX_i} = \exp(\alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i)\beta_2 \frac{1}{X_i} = \beta_2 \frac{Y_i}{X_i}$$

Esneklik (yüzde değişim):

$$\frac{dY_i/Y_i}{dX_i/X_i} = \frac{dY_i}{dX_i}\frac{X_i}{Y_i} = \left(\beta_2 \frac{Y_i}{X_i}\right)\frac{X_i}{Y_i} = \beta_2$$

- Bu özelliğinden dolayı log-doğrusal model "sabit esneklik" (constant elasticity) modeli diye de adlandırılır.

Log-Doğrusal Model Açıklayıcı Örnek

- Örnek olarak kahve talebi modeline bakalım.
- Veriler üzerinde log-log doğrusallaştırması yapıldıktan sonra hesaplanan bağlanım şu sonuçları vermektedir:

$$
\begin{array}{llll}
\widehat{\ln Y_i} = & 0{,}7774 & -\ 0{,}2530\ \ln X_i & \\
\text{öh} & (0{,}0152) & (0{,}0494) & r^2 = 0{,}7448 \\
t & (51{,}1447) & (-5{,}1214) & F_{1,9} = 26{,}23
\end{array}
$$

- Fiyat esnekliği katsayısı $-0{,}25$ olarak bulunmuştur.
- Buna göre kahve fiyatında yüzde 1 artış olması durumunda kahve tüketiminin ortalama yüzde 0,25 azalması beklenir.
- Öyleyse kahve talebinin kendi fiyatına göre esnek olmadığı söylenebilir.

Log-Doğrusal Model Açıklayıcı Örnek

- Zaman zaman doğrusal ve log-doğrusal model arasında bir seçim yapmak gerekli olabilir.
- Bağımlı değişkenler aynı olmadığı için, böyle bir durumda iki r^2 değerini doğrudan karşılaştırma yoluna gidilemez.
- Katsayı tahminlerini karşılaştırma konusunda ise $\beta_2(\bar{X}/\bar{Y})$ tanımından yararlanılarak doğrusal model için bir ortalama esneklik hesaplanabilir.
- Kahve talebi örneğinde, log-log modelden elde edilen β_2 esneklik katsayısı $-0{,}25$ iken, doğrusal modelin ortalama esnekliği de benzer biçimde $-0{,}22$ olarak bulunur.
- Dikkat: $\beta_2(\bar{X}/\bar{Y})$ kullanılarak bulunan ortalama esneklik farklı $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ değerlerine bağlıdır. Log-doğrusal modelin esneklik katsayısı β_2 ise her fiyat düzeyinde aynıdır.

Log-Doğ Modeli

- Ekonomistler sık sık para arzı, istihdam, GSYH gibi değişkenlerin büyüme oranlarının tahmini ile ilgilenirler.
- Bileşik faiz formülünü anımsayalım:

$$Y_t = Y_0(1+r)^t$$

- Burada r, Y'nin zaman içindeki (bileşik) büyüme hızıdır. Yukarıdaki denklemin logaritmasını alalım:

$$\ln Y_t = \ln Y_0 + t \ln(1+r)$$

- $\beta_1 = \ln Y_0$ ve $\beta_2 = \ln(1+r)$ tanımlamalarını yapıp hata terimini de ekledikten sonra modeli şöyle yazabiliriz:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

- Yukarıda gösterilen modele "log-doğ" (log-lin) modeli denir.

Log-Doğ Modeli

Bu noktada, sık sık karşılaştığımız "mutlak değişim" (absolute change), "göreli değişim" (relative change) ve "yüzde değişim" (percentage change) terimleri arasındaki farka dikkat edelim:

Mutlak değişim	Göreli değişim	Yüzde değişim
ΔX	$\Delta X/X$	$100 \times \Delta X/X$

Eğer X'deki değişim küçükse, aşağıda gösterilen "yaklaştırma" (approximation) uygulamada sıklıkla kullanılır:

$$\Delta \ln X \approx \Delta X/X \quad \text{(göreli değişim)}$$

Log-Doğ Modeli

- Log-doğ modeline geri dönelim:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

- Bu modelde β_2 katsayısı, açıklayıcı değişken t'deki mutlak bir değişmeye karşılık Y'deki göreli değişimi ölçmektedir:

$$\beta_2 = \frac{\Delta \ln Y}{\Delta t}$$

- Diğer bir deyişle, β_2 katsayısı Y_t değişkenindeki büyüme hızını ($\beta_2 > 1$) ya da küçülme hızını ($\beta_2 < 1$) vermektedir.
- Bu nedenle, log-doğ modeline aynı zamanda "sabit büyüme" (fixed growth) modeli de denir.

Log-Doğ Modeli Açıklayıcı Örnek

Reel GSSSO örneğine dönersek, log-doğ modeline dayanan bağlanım bulgularının aşağıdaki gibi olduğunu görürüz:

$$\begin{array}{llll}
\widehat{\text{GSSSO}}_t = & 2{,}8516 & + \; 0{,}0509 \; t & \\
\text{öh} & (0{,}0517) & (0{,}0061) & \\
t & (55{,}1830) & (8{,}3932) & r^2 = 0{,}8544
\end{array}$$

- Buna göre, 1987-2000 döneminde Türkiye'de gayri safi sabit sermaye oluşumu yılda ortalama yüzde 5,09'dur.
- Ayrıca, $\ln Y_0 = 2{,}8516$'nın anti-logaritmasını alırsak bulacağımız 17,3155 değeri de 1987 yılı için GSSSO'nun yaklaşık 17,3 milyon TL olarak tahmin edildiğini gösterir.

Doğrusal Eğilim Modeli

- Araştırmacılar kimi zaman log-doğ modeli yerine aşağıdaki modeli tahmin ederler:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$$

- In Y_t yerine Y_t'nin zamana göre bağlanımının hesaplandığı bu modele "doğrusal eğilim" (linear trend) modeli denir.
- Buradaki t, "eğilim" (trend) değişkeni diye adlandırılır.
- Eğer β_2 eğim katsayısı artı çıkarsa Y_t'de zaman içinde bir artış eğilimi, eksi çıkarsa da bir düşüş eğilimi var demektir.

Doğrusal Eğilim Modeli

Log-doğ ve doğrusal eğilim modellerine ilişkin iki noktayı özellikle belirtmekte yarar vardır:

1. İki modelin bağımlı değişkenleri farklı olduğu için bu modellerin r^2 değerlerini karşılaştırmak doğru değildir.
2. Bağımlı değişkenin zaman içinde değişiminin bu şekilde incelenmesi ancak zaman serisinin "durağan" (stationary) olması durumunda uygundur.

Durağanlık kavramı ileride zaman serileri ekonometrisi konusu altında incelenecektir.

Doğrusal Eğilim Modeli Açıklayıcı Örnek

GSSSO örneğimize geri dönelim ve şimdi de doğrusal eğilim modelini tahmin edelim:

$$\begin{array}{lcccccl} \widehat{\text{GSSSO}}_t & = & 16{,}3621 & + & 1{,}2848 & t & \\ \text{öh} & & (1{,}4170) & & (0{,}1664) & & \\ t & & (11{,}5466) & & (7{,}7202) & & r^2 = 0{,}8324 \end{array}$$

- Buna göre, 1987-2000 döneminde Türkiye'de reel GSSSO yılda yaklaşık 1,3 milyon TL olarak gerçekleşmiştir.
- Demek ki bu dönemde reel GSSSO'da artış eğilimi vardır.

Doğ-Log Modeli

- Eğer X'deki yüzde değişime karşılık Y'deki mutlak değişim ile ilgileniyorsak, buna uygun bir modeli şöyle yazabiliriz:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

- Yukarıdaki modele "doğ-log" (lin-log) modeli denir.
- Bu modelde β_2 katsayısını kullanarak şunu gösterebiliriz:

$$\beta_2 = \frac{\Delta Y}{\Delta X / X} \quad \Rightarrow \quad \Delta Y = \beta_2 (\frac{\Delta X}{X})$$

- Böylece X'deki 0,01 (yüzde 1) oranındaki göreli değişmeye karşı Y'de $\beta_2 \times 0{,}01$ boyutunda mutlak değişme olmaktadır.
- Dolayısıyla, doğ-log modelini yorumlarken eğim katsayısı β_2'yi önce 0,01 ile çarparız.

Doğ-Log Modeli Açıklayıcı Örnek

Örnek olarak 1987-2006 yıllarında Türkiye'deki GSYH ve M2 para arzı verilerini kullanarak doğ-log modelini tahmin edelim:

$$\begin{array}{llll} \widehat{\text{GSYH}}_t = & -26{,}7905 & + \; 41{,}9796 \ \ln \text{M2}_t & \\ \text{öh} & (13{,}6546) & (4{,}2488) & \\ t & (-1{,}9620) & (9{,}8805) & r^2 = 0{,}8443 \end{array}$$

- 41,98 büyüklüğündeki eğim katsayısının anlamı, örneklem döneminde para arzındaki yüzde 1'lik bir artışın GSYH'de ortalama 0,4198 milyon liralık artışa yol açmış olduğudur.

Evrik Model

- Aşağıda gösterilen türden modellere evrik model denir:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 \frac{1}{X_i} + u_i$$

- Yukarıdaki model, X değişkeni modele evrik girdiğinden, X'te doğrusal değildir ama β_1 ve β_2'de doğrusaldır.
- Modelin önemli özelliği, X sonsuza yaklaşırken Y'nin de β_1 "kavuşmazsal" (asymptotic) değerine yakınsamasıdır.
- Dolayısıyla, evrik modellerde açıklayıcı değişken artarken bağımlı değişkenin yaklaştığı bir limit değeri bulunur.
- Bu tür modellere örnek olarak Phillips eğrisi ya da üretimin ortalama sabit gider ile olan ilişkisi verilebilir.

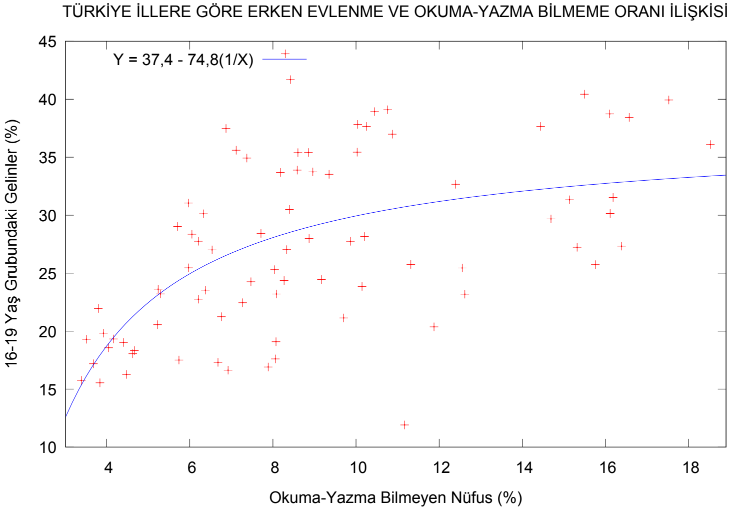
Evrik Model Açıklayıcı Örnek

Bir evrik model uygulaması olarak 2009 yılında Türkiye'de illere göre 16-19 yaş grubundaki gelinlerin oranı (Y) ile okuma yazma bilmeyenlerin toplam nüfusa oranı (X) verilerine bakalım:

$$\begin{array}{lllll} \widehat{Y}_i = & 37{,}4131 & - & 74{,}7805 & 1/X_i \\ \text{öh} & (1{,}7221) & & (11{,}7015) & r^2 = 0{,}3408 \\ t & (21{,}7253) & & (-6{,}3907) & F_{1,79} = 40{,}8407 \end{array}$$

- Buna göre erken evliliklerde tavan oran yaklaşık %36,7'dir.
- Şöyle ki $X = \%100$ ve $1/X = 0{,}01$ olunca 16-19 yaşında evlenen bayanların oranı da % $(37{,}4131 - 0{,}7478)$ olur.
- Dikkat: Gelir gibi diğer önemli etmenleri de göz önüne alan bir modelde bu kavuşmazsal oran daha düşük çıkacaktır.

Evrik Model Açıklayıcı Örnek



Log-Evrik Model

- Evrik modelin bir türü olan "log-evrik" (log-reciprocal) model aşağıdaki biçimi alır:

$$\ln Y_i = \beta_1 - \beta_2 \frac{1}{X_i} + u_i$$

- Türev hesabı kullanılarak burada Y'nin X'e göre eğimi $d/dX(\ln Y_i) = \beta_2(1/X_i^2)$ olarak bulunur.
- Model çizim üzerinde incelendiğinde de X artarken Y'deki artışın önce dışbükey ve daha sonra da içbükey görünüm sergilediği anlaşılır.
- Öyleyse böyle bir model sermaye sabitken üretimin önce artarak arttığı ve sonra da azalarak arttığı üretim-işgücü ilişkisini çözümlemede kullanılabilir.

İşlev Biçiminin Seçimi

Ele almış olduğumuz çeşitli model işlev biçimlerine ilişkin eğim ve esneklik bilgileri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge: Çeşitli İşlev Biçimlerinin Eğim ve Esneklikleri

Model	İşlev Biçimi	Eğim ($\frac{dY}{dX}$)	Esneklik ($\frac{dY}{dX}\frac{X}{Y}$)
Doğrusal	$Y = \beta_1 + \beta_2 X$	β_2	$\beta_2 \frac{X}{Y}$
Log-Log	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2 \left(\frac{Y}{X}\right)$	β_2
Log-Doğ	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 X$	$\beta_2(Y)$	$\beta_2(X)$
Doğ-Log	$Y = \beta_1 + \beta_2 \ln X$	$\beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$	$\beta_2 \left(\frac{1}{Y}\right)$
Evrik	$Y = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$	$-\beta_2 \left(\frac{1}{X^2}\right)$	$-\beta_2 \left(\frac{1}{XY}\right)$
Log-Evrik	$\ln Y = \beta_1 - \beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$	$\beta_2 \left(\frac{Y}{X^2}\right)$	$\beta_2 \left(\frac{1}{X}\right)$

İşlev Biçiminin Seçimi

Görgül çalışmalarda model seçiminin deneyim gerektirdiği açıktır. Yardımcı olabilecek birkaç nokta şunlardır:

1. Bazı durumlarda iktisat kuramı belli bir işlev biçimini gösterebilir ya da öngörebilir.
2. Tahmin edilen katsayıların önsel beklentileri karşıladığı doğrulanmalıdır.
3. Almaşık modelleri karşılaştırmak için eğim ve esneklik katsayılarını hesaplamak yardımcı olabilir.
4. Veri setine iki farklı model yakıştırıldığında, eğer bağımlı değişkenler aynı ise r^2 değerleri karşılaştırılabilir.
5. Ancak iki modeli r^2 temelinde karşılaştırmak her zaman uygun değildir. Bunun bir nedeni, eklenen her açıklayıcı değişkenin r^2'yi yükseltecek olmasıdır.

Toplamalı ya da Çarpmalı Hata Terimi

İşlev biçiminin seçimine ilişkin olarak, aşağıdaki hata terimsiz bağlanım modelini ele alalım:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2}$$

Bu modeli tahmin amacıyla üç farklı şekilde yazabiliriz:

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} u_i$$

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} e^{u_i}$$

$$Y_i = \beta_1 X_i^{\beta_2} + u_i$$

İki yanlı logaritmalarını alırsak da şunları elde ederiz:

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_i + \ln u_i$$

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_i + u_i$$

$$\ln Y_i = \ln(\beta_1 X_i^{\beta_2} + u_i)$$

- Yukarıda görülen $\alpha = \ln \beta_1$'dir.
- İlk iki model değiştirgelerde doğrusalken, üçüncü modelin özünde doğrusal-dışı olduğuna dikkat ediniz.

Toplamalı ya da Çarpmalı Hata Terimi

- SEK'in EDYT özelliğinin hatalarda sıfır ortalama ve sabit varyans aradığını anımsayalım.
- Ayrıca önsav sınaması için u_i'lerin normal dağılımlı olduğu, kısaca $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsayılmaktadır.
- Buna göre, örneğimizdeki ikinci modeli kullanmak istersek $\ln u_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsaymamız gereklidir.
- Ancak eğer $\ln u_i \sim N(0, \sigma^2)$ ise, ilk modeldeki u_i de $e^{\sigma^2/2}$ ortalama, $e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ varyansla log-normal dağılımlı olur.
- Üçüncü model ise değiştirgelerde doğrusal-dışı olduğu için ancak yinelemesel bir yöntem ile çözülebilir.
- Sonuç olarak, modeli bağlanım için dönüştürürken hata terimine özel bir dikkat göstermek gereklidir.
- Hatalı doğrusallaştırma, arzulanan istatistiksel özellikleri taşımayan bir modele yol açabilir.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Üç değişkenli model