İki Değişkenli Bağlanım – Çıkarsama Sorunu

Aralık Tahmini

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 1 – Konu 15

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 (cc) BY-NC-SA

Ders Planı

Bazı Temel Noktalar

- Yansız SEK tahmincilerinin ürettiği tahminlerin anakütle değerlerine eşit olması beklenir.
- Ancak, örneklemlerin rastsallığı nedeniyle sonuçların gerçek değerlerden farklı çıkabileceği de bir gerçektir.
- Hata teriminin normalliği varsayımı altında $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, ve $\hat{\sigma}^2$ tahmincilerinin dağılımları ile ilgili şu bilgileri anımsayalım:

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \sigma^2_{\hat{\beta}_1})$$
$$\hat{\beta}_2 \sim N(\beta_2, \sigma^2_{\hat{\beta}_2})$$
$$Z = (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$$

Bazı Temel Noktalar

- Rastsallık etmeni nedeniyle tahminlerin gerçek değerlerine ne kadar yakın olduğunu bilmek isteriz.
- Öyleyse, yalnızca nokta tahminine güvenmek yerine onun iki yanında öyle bir aralık oluşturalım ki anakütlenin gerçek katsayısını belli bir olasılıkla içersin:

$$P(\hat{\beta} - \delta \leq \beta \leq \hat{\beta} + \delta) = 1 - \alpha$$

- Buradaki
  $0 < \alpha < 1$'e "anlamlılık düzeyi" (significance level),
  $1 - \alpha$'ya "güven katsayısı" (confidence coefficient),
  $\hat{\beta} - \delta$'ya "alt güven sınırı" (lower confidence limit),
  $\hat{\beta} + \delta$'ya ise "üst güven sınırı" (upper confidence limit)
  adı verilir.

Bazı Temel Noktalar

Aralık tahminine ilişkin bazı önemli noktalar şunlardır:

- Tanımlanan aralık rastsal bir aralıktır ve bir örneklemden diğerine değişecektir.
- Eğer $\alpha = 0{,}05$ ise, tanımlanan rastsal aralığın gerçek β değerini içerme olasılığı 0,95 ya da %95'tir.
- Belli bir örneklem alınarak bulunan sabit aralığın gerçek β'yı içerme olasılığının ise $(1 - \alpha)$ olduğu söylenmez.
- Çünkü, böyle bir durumda β ya bu aralığın içindedir ya da dışındadır. Diğer bir deyişle olasılık ya 1'dir ya da 0'dır.

β_1 ve β_2 İçin Güven Aralığı

- Hata teriminin normalliği varsayımı altında $\hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ SEK tahmincilerinin normal dağılımlı olduğunu biliyoruz.
- Öyleyse, bir ölçünlü normal değişken olan Z'yi aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$Z = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\text{öh}(\hat{\beta}_2)} = \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\sigma}$$

- Demek ki anakütlenin gerçek varyansı σ^2 biliniyorsa, β_2'yi incelemek için normal dağılımdan yararlanılabilir.
- Ancak, σ^2 genellikle bilinemediği için uygulamada yansız tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ kullanılır.

β_1 ve β_2 İçin Güven Aralığı

- σ^2 bilinmediği zaman bunun yerine yansız tahminci $\hat{\sigma}^2$ aşağıda gösterilen şekilde kullanılır:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\sigma} \\
Z_2 &= (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \\
t &= \frac{Z_1}{\sqrt{Z_2/(n-2)}} \\
&= \frac{(\hat{\beta}_2 - \beta_2)\sqrt{\sum x_i^2}}{\hat{\sigma}}
\end{aligned}
$$

- Demek ki, normal dağılan Z_1'in ki-kare dağılan Z_2'nin kendi serbestlik derecesine bölümünün kareköküne bölünmesi ile elde edilen t rastsal değişkeni, $n-2$ sd ile t dağılımlıdır.
- Bu işlem β_1 için $\text{öh}(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\sum X_i^2 / n \sum x_i^2}\sigma$ olması dışında benzerdir.

β_1 ve β_2 İçin Güven Aralığı

- Normal dağılım yerine t dağılımı kullanıldığı zaman β_1 için güven aralığı aşağıdaki gibi kurulur:

$$\begin{aligned} P(-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}) &= 1 - \alpha \\ P\left[-t_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\text{öh}(\hat{\beta}_1)} \leq t_{\alpha/2}\right] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

- Buradaki $t_{\alpha/2}$ değeri, $\alpha/2$ anlamlılık düzeyinde ve $(n-2)$ serbestlik derecesi için t dağılımından bulunan t değeridir.
- Bu $t_{\alpha/2}$ değerine $\alpha/2$ anlamlılık düzeyindeki "kritik t değeri" (critical t value) adı verilir.
- Normal dağıldığı bilinen β_2'nin güven aralığı da benzer şekilde bulunur.

β_1 ve β_2 İçin Güven Aralığı

- β_1 ve β_2'nin %100$(1-\alpha)$ güven aralıkları kısaca aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2}\text{öh}(\hat{\beta}_1)$$
$$\hat{\beta}_2 \pm t_{\alpha/2}\text{öh}(\hat{\beta}_2)$$

- Her iki durumda da güven aralığının genişliği tahmincinin ölçünlü hatası ile doğru orantılıdır.
- Zaman zaman β_1 ve β_2 için bir "birleşik güven aralığı" (joint confidence interval) kurmak gerekli olabilir. Bu durum daha sonraki konularda ele alınacaktır.

σ^2 İçin Güven Aralığı

- Normallik varsayımı altında $(n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ şeklinde tanımlanan değişkenin $n-2$ sd ile ki-kare dağılımlı olduğunu biliyoruz.
- Bu bilgiden yararlanarak σ^2'nin güven aralığını bulabiliriz:

$$\begin{aligned} P(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\alpha/2}) &= 1-\alpha \\ P\left[(n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq (n-2)\frac{\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right] &= 1-\alpha \end{aligned}$$

- Bu güven aralıklarının yorumu şudur: Farklı örneklemler kullanarak σ^2 ve β'lar için %100$(1-\alpha)$ güven sınırları bulur ve gerçek değerlerin bu sınırlar içinde olduğunu söylersek, her 100 seferde $100(1-\alpha)$ kez haklı çıkarız.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Önsav sınaması