Normallik Varsayımı ve Ençok Olabilirlik Yöntemi

EO Açıklayıcı Örnekler

Ekonometri 1 – Konu 14

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

1. EO Açıklayıcı Örnekler
   - Poisson Dağılımı EO Tahmincisi
   - Üstel Dağılım EO Tahmincisi
   - Normal Dağılım EO Tahmincisi

Poisson Dağılımı EO Tahmincisi

EO yöntemine bir örnek olarak Poisson dağılımını ele alalım.

Bu kesikli dağılım, verili bir süre ya da uzaysal alan içerisinde bir olayın belirli bir sayıda tekrarlanma olasılığını anlatır.

Örnek olarak, 5 dakikalık süre içinde belli bir noktadan geçen araç sayısı Poisson dağılımına uyan bir rastsal değişkendir.

Poisson dağılımının genel gösterimi şöyledir:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \tag{1}$$

- Burada
  x olayın gerçekleşme sayısını,
  λ ise belirli bir süredeki beklenen gerçekleşme sayısını göstermektedir.
- Artı değerli bir gerçel sayı olan λ'ya ait EO tahmincisini bulmak istiyoruz.

Poisson Dağılımı EO Tahmincisi

- Poisson dağılımının matematiksel gösterimini alalım ve n sayıda gözlem için olabilirlik işlevini aşağıdaki gibi yazalım.

$$\begin{aligned} \text{Oİ}(\lambda) &= f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} \\ &= \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!} \qquad (2) \end{aligned}$$

- İki yanlı logaritmasını alarak log-olabilirlik işlevini bulalım.

$$\ln \text{Oİ} = -n\lambda + \sum x_i \ln \lambda - \ln \prod x_i! \qquad (3)$$

Poisson Dağılımı EO Tahmincisi

- Log-olabilirlik işlevinin türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \lambda} = -n + \sum x_i \frac{1}{\lambda} = 0 \tag{4}$$

- Yukarıdaki eşitliği λ'ya göre çözersek şunu buluruz:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum x_i}{n} \tag{5}$$

- Demek ki EO yöntemi λ değiştirgesinin tahmincisini x'in örneklem ortalaması olarak bulmaktadır.

Üstel Dağılım EO Tahmincisi

İkinci bir örnek olarak "üstel" (exponential) dağılıma bakalım.

Bu sürekli dağılım, olayların belli bir sabit hızda yinelendiği Poisson türü bir süreçteki gerçekleşmeler arası süreyi anlatır.

Örnek olarak, belli bir noktadan rastsal olarak geçen araçlar arasında geçen süre üstel dağılıma uyan bir rastsal değişkendir.

Üstel dağılımın olasılık yoğunluk işlevi ise şöyledir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{-x/\theta} && X > 0 \text{ için,} \\ &= 0 && X \leq 0 \text{ için.} \end{aligned} \tag{6}$$

- Burada
  x süreyi,
  θ ise dağılıma ait "hız" (rate) değiştirgesini göstermektedir.
- Şimdi de θ'nın EO tahmincisini türetmek istiyoruz.

Üstel Dağılım EO Tahmincisi

- Baştaki örneklerde yaptığımız gibi, önce n gözlem için olabilirlik işlevini bulalım.

$$\text{Oİ} = \frac{1}{\theta^n} \exp\left(\sum \frac{-x_i}{\theta}\right) \tag{7}$$

- Log-olabilirlik işlevini yazalım, türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\ln \text{Oİ} = -n \ln \theta - \sum \frac{x_i}{\theta} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum \frac{x_i}{\theta^2} = 0 \tag{9}$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} \tag{10}$$

- Demek ki örneklem büyüklüğü n iken θ değiştirgesinin EO tahmincisi $\tilde{\theta} = \sum x_i / n$ olarak bulunmaktadır.

Normal Dağılım EO Tahmincisi

Son olarak, şimdi de $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ iki değişkenli bağlanım modelini EO yöntemi ile tahmin edelim.

- Bunun için önce hata teriminin sıfır ortalama ile normal ve bağımsızca dağıldığını ($u_i \sim NBD(0, \sigma^2)$) varsayalım.
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastsal değişken X'in olasılık yoğunluk işlevi aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\} \quad (11)$$

- Yukarıdaki exp işlemcisi e üzeri anlamına gelmektedir.

Normal Dağılım EO Tahmincisi

- Hataların $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ olduğunu varsaydığımıza göre $Y_i \sim N(\beta_1 + \beta_2 X_i, \sigma^2)$'dir. Diğer bir deyişle, Y_i değerleri $\beta_1 + \beta_2 X_i$ ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağılırlar.
- Buna göre tek bir Y'nin olasılık yoğunluk işlevi şudur:

$$f(Y|\beta_1 + \beta_2 X, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(Y - \beta_1 - \beta_2 X)^2}{\sigma^2}\right\} \qquad (12)$$

- Birbirinden bağımsız $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sayıda Y_i'nin ortak olasılık yoğunluk işlevi ise n tekil OYİ'nin çarpımıdır:

$$f(Y_1|\beta_1 + \beta_2 X_1, \sigma^2)\, f(Y_2|\beta_1 + \beta_2 X_2, \sigma^2) \ldots f(Y_n|\beta_1 + \beta_2 X_n, \sigma^2) \qquad (13)$$

Normal Dağılım EO Tahmincisi

- Elimizdeki n gözlemdeki her bir Y_i ve X_i için (12)'i (13)'de yerine koyarsak, olabilirlik işlevini buluruz:

$$\text{Oİ}(\beta_1, \beta_2, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2}{\sigma^2} \right\} \tag{14}$$

- Bu denklemin doğal logaritmasını alırsak da log-olabilirlik işlevini elde ederiz:

$$\ln \text{Oİ} = -n \ln(\sigma) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2}{\sigma^2} \tag{15}$$

- $\ln$ Oİ değerini ençoklamak en sondaki terimi enazlamak demektir. Bu da en küçük kareler yaklaşımı ile aynı şeydir.

Normal Dağılım EO Tahmincisi

- Log olabilirlik işlevinin β_1, β_2 ve σ^2'ye göre kısmi türevleri alınırsa şu eşitlikler bulunur:

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)(-1) \tag{16}$$

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)(-X_i) \tag{17}$$

$$\frac{\partial \ln \text{Oİ}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \beta_1 - \beta_2 X_i)^2 \tag{18}$$

(. . . devam)

Normal Dağılım EO Tahmincisi

- (16), (17) ve (18) sıfıra eşitlenip birlikte çözüldükten sonra ise aşağıdaki EO tahmincileri elde edilir:

$$\tilde{\beta}_1 = \bar{Y} - \tilde{\beta}_2 \bar{X} \tag{19}$$

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \tag{20}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n} \tag{21}$$

Normal Dağılım EO Tahmincisi

- Görüldüğü gibi u_i'lerin normal dağıldığı varsayımı altında β bağlanım katsayılarının EO ve SEK tahmincileri aynıdır.
- Diğer yandan σ^2 tahminleri farklıdır:

SEK tahmincisi

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2} \tag{22}$$

EO tahmincisi

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n} \tag{23}$$

- Buna göre σ^2'nin SEK tahmincisi yansızken EO tahmincisi aşağı doğru yanlıdır.
- Ancak kavuşmazsal olarak, diğer bir deyişle n sonsuza yaklaştıkça, EO tahmincisi de yansızlaşır.
- Öyleyse, σ^2'nin EO tahmincisi "kavuşmazsal yansızlık" (asymptotic unbiasedness) özelliğini taşımaktadır.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

Aralık tahmini