İki Değişkenli Bağlanım Modeli

SEK Tahmincilerinin Arzulanan Özellikleri

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 1 – Konu 9

Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011 CC BY-NC-SA

ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ders Planı

Gauss - Markov Kanıtsavı

- Klasik Doğrusal Bağlanım Modeli (KDBM) varsayımları geçerli iken, en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahminler arzulanan bazı özellikler taşırlar.
- Gauss - Markov kanıtsavına göre $\hat{\beta}$ SEK tahmincilerine "En iyi Doğrusal Yansız Tahminci" (Best Linear Unbiased Estimator), kısaca "EDYT" (BLUE) adı verilir.

Gauss - Markov Kanıtsavı

EDYT olan $\hat{\beta}$ şu üç arzulanan özelliği taşır:

1. Doğrusaldır. Diğer bir deyişle bağlanım modelindeki Y bağımlı değişkeninin doğrusal bir işlevidir.
2. Yansızdır. Beklenen değeri $E(\hat{\beta})$, anakütleye ait gerçek β değerine eşittir.
3. Tüm doğrusal ve yansız tahminciler içinde enaz varyanslı olandır. Kısaca en iyi ya da "etkin" (efficient) tahmincidir.

Gauss - Markov kanıtsavı hem kuramsal olarak hem de uygulamada önemlidir.

SEK Tahmincilerinin Doğrusallık Özelliği

- SEK tahmincilerinin "doğrusallık" (linearity) arzulanan özelliğini gösterebilmek için $\hat{\beta}_2$ formülünü şöyle yazalım:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i - \bar{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

- Bu basitçe şu şekilde de gösterilebilir:

$$\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum k_i Y_i, \qquad k_i = \frac{x_i}{(\sum x_i^2)}$$

- x_i değerleri olasılıksal olmadığına göre k_i'ler de gerçekte Y_i'lerin önüne gelen birer "ağırlık" (weight) katsayısıdırlar.
- $\hat{\beta}_2$ bu durumda Y_i'lerin doğrusal bir işlevidir. Basitçe $\hat{\beta}_2$'nın Y_i'lerin bir ağırlıklı ortalaması olduğu da söylenebilir.
- $\hat{\beta}_1$'nın doğrusal olduğu da benzer biçimde kanıtlanabilir.

SEK Tahmincilerinin Yansızlık Özelliği

SEK tahmincilerinin "yansızlık" (unbiasedness) arzulanan özelliğini gösterebilmek için ağırlık terimi k'nin şu beş özelliği önemlidir:

1. X_i'ler olasılıksal olmadığından k_i'ler de olasılıksal değildir.
2. $\sum k_i = 0$'dır. $(\sum x_i = 0$ olduğu için)
3. $\sum k_i^2 = \sum x_i^2 / \sum (x_i^2)^2 = 1 / \sum x_i^2$ olur.
4. $\sum k_i x_i = \sum x_i^2 / \sum x_i^2 = 1$'dir.
5. $\sum k_i x_i = \sum k_i X_i$ olur.
   $(\sum k_i x_i = \sum k_i (X_i - \bar{X}) = \sum k_i X_i - \bar{X} \sum k_i$ olduğu için)

Dikkat: Tüm bu özellikler k_i'nin tanımından türetilebilmektedir.

SEK Tahmincilerinin Yansızlık Özelliği

- $\hat{\beta}_2$'nın yansız olduğunu kanıtlamak için $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ biçimindeki ABİ'yi $\hat{\beta}_2$ formülünde yerine koyalım:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \sum k_i Y_i \\ &= \sum k_i(\beta_1 + \beta_2 X_i + u_i) \\ &= \beta_1 \sum k_i + \beta_2 \sum k_i X_i + \sum k_i u_i \\ &= \beta_2 + \sum k_i u_i\end{aligned}$$

- Yukarıdaki son adımda k_i'nin az önce sözü edilen ikinci, dördüncü ve beşinci özelliklerinden yararlanılmıştır.
- β_2 ve k_i'nin olasılıksal olmadığını ve $E(u_i) = 0$ varsayımını anımsayalım ve her iki yanın beklenen değerini alalım:

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta}_2) &= E(\beta_2) + \sum k_i E(u_i) \\ &= \beta_2\end{aligned}$$

- $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$ olduğuna göre $\hat{\beta}_2$ yansız bir tahmincidir.

SEK Tahmincilerinin Enaz Varyanslılık Özelliği

- SEK tahmincilerinin "enaz varyans" (minimum variance) arzulanan özelliğini gösterebilmek için ise β_2'nin en küçük kareler tahmincisinden yola çıkalım:
$$\hat{\beta}_2 = \sum k_i Y_i$$
- Şimdi β_2 için başka bir doğrusal tahminci tanımlayalım:
$$\tilde{\beta}_2 = \sum w_i Y_i$$
- Buradaki ($\tilde{}$) işareti "dalga" (tilde) diye okunur.
- w_i'ler de birer ağırlıktır ama $w_i = k_i$ olmak zorunda değildir:
- $\tilde{\beta}_2$'nın yansız olabilmesi için gerekli koşullara bir bakalım:
$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}_2) &= \sum w_i E(Y_i) \\ &= \sum w_i(\beta_1 + \beta_2 X_i) \\ &= \beta_1 \sum w_i + \beta_2 \sum w_i X_i \end{aligned}$$
- Buna göre, $\tilde{\beta}_2$'nın yansız olabilmesi için şunlar gereklidir:
$$\sum w_i = 0, \qquad \sum w_i x_i = \sum w_i X_i = 1$$

(...devam)

SEK Tahmincilerinin Enaz Varyanslılık Özelliği

- $\text{var}(\hat{\beta}_2) \leq \text{var}(\tilde{\beta}_2)$ savını kanıtlamak istiyoruz. Bunun için şimdi $\tilde{\beta}_2$'nın varyansını ele alalım:

$$\begin{aligned}
\text{var}(\tilde{\beta}_2) &= \text{var}(\textstyle\sum w_i Y_i) \\
&= \textstyle\sum w_i^2 \text{var}(Y_i) \qquad\qquad [\text{Dikkat: var}(Y_i) = \text{var}(u_i) = \sigma^2] \\
&= \sigma^2 \textstyle\sum w_i^2 \qquad\qquad [\text{Dikkat: cov}(Y_i, Y_j) = 0,\ (i \neq j)] \\
&= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} + \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 \\
&= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + \sigma^2 \sum \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + 2\sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) \left(\frac{x_i}{\sum x_i^2} \right) \\
&= \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{1}{\sum x_i^2} \right)
\end{aligned}$$

(...devam)

SEK Tahmincilerinin Enaz Varyans Özelliği

- Son satırda bulmuş olduğumuz şey şudur:

$$\text{var}(\tilde{\beta}_2) = \sigma^2 \sum \left(w_i - \frac{x_i}{\sum x_i^2} \right)^2 + \sigma^2 \left(\frac{1}{\sum x_i^2} \right)$$

- Yukarıda en sağdaki terim w_i'den bağımsızdır.
- Öyleyse var($\tilde{\beta}_2$)'yı enazlayabilmek ilk terime bağlıdır ve ilk terimi sıfırlayan w_i değeri de şudur:

$$w_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = k_i$$

- Bu durumda aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\text{var}(\tilde{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = \text{var}(\hat{\beta}_2)$$

- Demek ki w_i ağırlıkları k_i ağırlıklarına eşit olduğunda $\tilde{\beta}_2$'nın varyansı enazlanarak $\hat{\beta}_2$'nın varyansına eşitlenmektedir.
- Sonuç olarak, en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_2$ tüm yansız ve doğrusal tahminciler içinde enaz varyanslı tahmincidir.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

SEK yönteminin ardındaki varsayımlar