Bağlanım Çözümlemesi

TÜBA
TÜRKİYE BİLİMLER AKADEMİSİ

UADMK
ULUSAL AÇIK DERS MALZEMELERİ KONSORSİYUMU

Ekonometri 1 – Konu 7
Sürüm 2,0 (Ekim 2011)

UADMK Açık Lisans Bilgisi

 Bu ekonometri ders notları setinin tamamına "http://www.acikders.org.tr" adresinden ulaşılabilir.

A. Talha Yalta
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Ekim 2011

Ders Planı

Varsayımsal Bir Örnek

- Bağlanım çözümlemesine başlangıç olarak ikili bağlanım modelini inceleyeceğiz.
- İki değişkenli durum çoğu uygulama için yetersiz olsa da temel bilgileri olabildiğince yalın gösterebilmek açısından önemlidir.
- İkili bağlanıma varsayımsal bir örnek olarak toplam nüfusu 60 aileden oluşan bir ülke düşünelim.
- Bu ailelerin vergiden sonraki harcanabilir haftalık gelirleri X ve haftalık tüketim harcamaları Y arasındaki ilişkiyi tahmin etmek istiyor olalım.
- Bunun için öncelikle bu 60 aileyi gelirleri yaklaşık aynı olan 10 farklı öbeğe ayıralım.

Varsayımsal Örnek Verileri

- Örneğimiz ile ilgili varsayımsal veriler aşağıdadır:

Çizelge: Haftalık Aile Geliri X ile Haftalık Tüketim Harcamaları Y, \$

$Y \downarrow, X \rightarrow$	**80**	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**	**260**
	55	65	79	80	102	110	120	135	137	150
	60	70	84	93	107	115	136	137	145	152
	65	74	90	95	110	120	140	140	155	175
	70	80	94	103	116	130	144	152	165	178
	75	85	98	108	118	135	145	157	175	180
	–	88	–	113	125	140	–	160	189	185
	–	–	–	115	–	–	–	162	–	191
Toplam	325	462	445	707	678	750	685	1043	966	1211

- Buradaki her bir sütun, farklı gelir düzeylerine (X) karşılık gelen tüketim harcamaları (Y) dağılımını göstermektedir.

Koşullu Olasılık ve Koşullu Ortalama

- Örnekteki $X = 80$ değerine karşılık gelen 5 ayrı Y değeri bulunmaktadır: 55, 60, 65, 70 ve 75.
- Yukarıdaki tüketim harcamalarının her birinin gerçekleşme olasılığı ise $\frac{1}{5}$'tir.
- Bu durumda, $X = 80$ olduğunda Y'nin de 55 olma "koşullu olasılığı" (conditional probability) $P(Y = 55|X = 80) = \frac{1}{5}$'tir.
- "Koşullu ortalama" (conditional mean) ya da "koşullu beklenen değer" (conditional expected value) ise Y'nin her bir koşullu olasılık dağılımı için beklenen değerini gösterir.
- Koşullu ortalamayı bulmak için ilgili Y değerleri ve bunlara karşılık gelen koşullu olasılıklar çarpılıp toplanır.
- Örnek olarak, $X = 80$ iken Y'nin koşullu ortalaması $55(\frac{1}{5}) + 60(\frac{1}{5}) + 65(\frac{1}{5}) + 70(\frac{1}{5}) + 75(\frac{1}{5}) = 65$ olur.

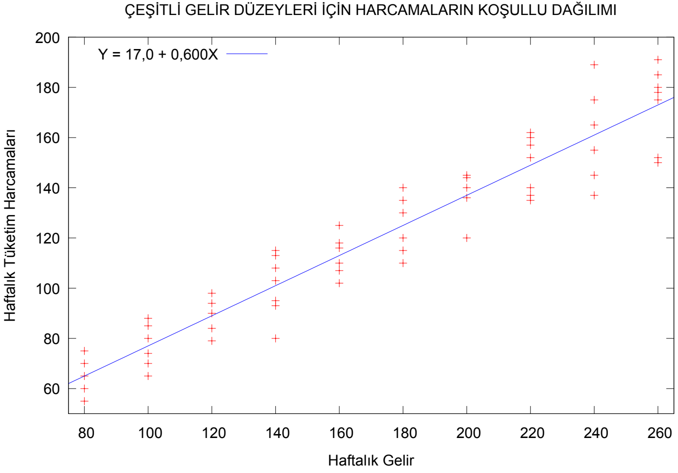
Koşullu Olasılık ve Koşullu Ortalama

Çizelge: $P(Y|X_i)$ Koşullu Olasılık ve Koşullu Ortalamaları

$Y\downarrow, X\rightarrow$	**80**	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**	**260**
	1/5	1/6	1/5	1/7	1/6	1/6	1/5	1/7	1/6	1/7
	1/5	1/6	1/5	1/7	1/6	1/6	1/5	1/7	1/6	1/7
	1/5	1/6	1/5	1/7	1/6	1/6	1/5	1/7	1/6	1/7
	1/5	1/6	1/5	1/7	1/6	1/6	1/5	1/7	1/6	1/7
	1/5	1/6	1/5	1/7	1/6	1/6	1/5	1/7	1/6	1/7
	–	1/6	–	1/7	1/6	1/6	–	1/7	1/6	1/7
	–	–	–	1/7	–	–	–	1/7	–	1/7
Ortalama	65	77	89	101	113	125	137	149	161	173

Anakütle Bağlanım İşlevi

Verilerimizi “serpilim çizimi” (scatter plot) üzerinde inceleyelim:



Anakütle Bağlanım İşlevi

Çizimde görülen artı eğimli doğrunun gösterdiği matematiksel işlev "anakütle bağlanım işlevi" (population regression function) ya da kısaca "ABİ" (PRF) olarak adlandırılır:

Anakütle Bağlanım İşlevi

Anakütle bağlanım işlevi, açıklayıcı değişken(ler)in sabit değerlerine karşılık gelen bağımlı değişkenin koşullu ortalamaları ya da koşullu beklenen değerlerinin geometrik yerini gösterir.

- Her koşullu ortalama X'in bir işlevidir: $E(Y|X_i) = f(X_i)$.
- Anakütle bağlanım işlevi denilen $f(X_i)$, X'teki değişmeye karşılık Y'nin dağılımının ortalama tepkisini vermektedir.
- Kısaca Y'nin ortalama değeri ile ilgileniyoruz ama özellikle de Y'nin ortalamasının X'lere bağlı olarak nasıl değiştiğini bulmaya çalışıyoruz.

Anakütle Bağlanım İşlevi

- $f(X_i)$'nin işlev biçiminin ne olduğu sorusu önemlidir.
- Gerçek yaşamda tüm anakütle incelemeye açık olmadığı için burada iktisat kuramından yararlanılmalıdır.
- Örnek olarak, bir ekonomist tüketim harcamalarının gelirle doğrusal bir ilişki içinde olduğunu söylüyor olsun.
- Bu durumda varsayılabilecek doğrusal işlev de şu olur:

$$E(Y|X_i) = f(X_i) = \beta_1 + \beta_2 X_i$$

Doğrusal İşlevin Anlamı

"Doğrusal" (linear) işlev, "değişkenlerde doğrusallık" (linearity in the variables) ve "değiştirgelerde doğrusallık" (linearity in the parameters) olmak üzere iki farklı anlama gelebilir:

Değişkenlerde Doğrusallık

Doğal ve basitçe bağlanım işlevinin düz bir doğruyu gösterdiği durumdur.

Doğrusal: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i$

Doğrusal-dışı: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^2$

Değiştirgelerde Doğrusallık

$E(Y|X_i)$'nin β değiştirgelerinin doğrusal bir işlevi olduğu durumdur.

Doğrusal: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i^2$

Doğrusal-dışı: $Y_i = \beta_1 + \sqrt{\beta_2} X_i$

Rastsal Hata Terimi

- Örneğimizde görüldüğü gibi gelir artarken tüketim harcamaları da genel olarak artmaktadır.
- Diğer yandan, tekil bir ailenin harcamasının geliri daha düşük olan bir aileden fazla olması da zorunlu değildir:

Çizelge: Haftalık Aile Geliri X ile Haftalık Tüketim Harcamaları Y, $

$Y \downarrow, X \rightarrow$	**80**	**100**	**120**	**140**	**160**	**180**	**200**	**220**	**240**	**260**
	55	65	79	80	102	110	120	135	137	150
	60	70	84	93	107	115	136	137	145	152
	65	74	90	95	110	120	140	140	155	175
	70	80	94	103	116	130	144	152	165	178
	75	85	98	108	118	135	145	157	175	180
	–	88	–	113	125	140	–	160	189	185
	–	–	–	115	–	–	–	162	–	191
Toplam	325	462	445	707	678	750	685	1043	966	1211

Rastsal Hata Terimi

- Tekil bir ailenin harcamasının aynı gelir düzeyindeki bütün ailelerin harcamalarının ortalaması, diğer bir deyişle koşullu beklenen değeri dolayında dağıldığını biliyoruz.
- Buna göre, bireysel Y_i'nin kendi beklenen değerinden gösterdiği "sapma" (deviation) şöyle gösterilebilir:

$$
\begin{aligned}
u_i &= Y_i - E(Y|X_i) \\
\text{ya da} \quad Y_i &= E(Y|X_i) + u_i \\
\text{ya da} \quad Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i
\end{aligned}
$$

- Buradaki u_i "bozukluk" (disturbance) terimi, artı ya da eksi değerler alabilen ama gözlenemeyen "rastsal hata terimi" (random error term) diye adlandırılır.

Rastsal Hata Teriminin Beklenen Değeri

- $Y_i = E(Y|X_i) + u_i$ eşitliğinin her iki yanının beklenen değeri alınırsa şu bulunur:

$$\begin{aligned} Y_i &= E(Y|X_i) + u_i \\ E(Y_i|X_i) &= E[E(Y|X_i)] + E(u_i|X_i) \\ E(Y_i|X_i) &= E(Y|X_i) + E(u_i|X_i) \\ 0 &= E(u_i|X_i) \end{aligned}$$

- $E(Y_i|X_i)$ ile $E(Y|X_i)$ aynı şey olduğu için, $E(u_i|X_i) = 0$ olur.
- Bu durumda, u_i'lerin koşullu ortalamasının sıfır olduğu varsayımına dayanılarak, bağlanım doğrusunun Y'nin koşullu ortalamasından geçtiği sonucuna ulaşılabilir.

Rastsal Hata Teriminin Önemi

Modele katılmayan ama Y'yi etkileyen tüm değişkenlerin yerine geçen hata terimi u_i'nin modele açıkça koyulması gereğinin nedenlerinden bazıları şunlardır:

1. Kuramın belirsizliği ya da eksikliği
2. Yeterli ya da geçerli verilerin bulunamaması
3. İlişkili ancak ortak etkisi küçük olan değişkenler
4. İnsan davranışlarının doğasında olan rastsallık
5. Güçsüz "yaklaşık değişkenler" (proxy variables)
6. Basitlik ilkesi
7. Bilinemeyen işlev biçimi

Örneklem Bağlanım İşlevi

- Gerçek yaşamda anakütle verilerine ulaşabilme olasılığı düşüktür.
- Çoğu uygulamada elimizde yalnızca anakütleden alınmış örneklem verileri bulunmaktadır.
- Öyleyse yanıtlamamız gereken önemli soru, örneklem verilerini kullanarak anakütle bağlanım işlevi ABİ'yi tahmin edip edemeyeceğimiz sorusudur.
- Rastsal bir örneklem kullanarak bulunan bağlanım işlevine "örneklem bağlanım işlevi" (sample regression function) ya da kısaca "ÖBİ" (SRF) denir.
- Bu işlevi anlatan doğruya ise "örneklem bağlanım doğrusu" (sample regression line) adı verilir.

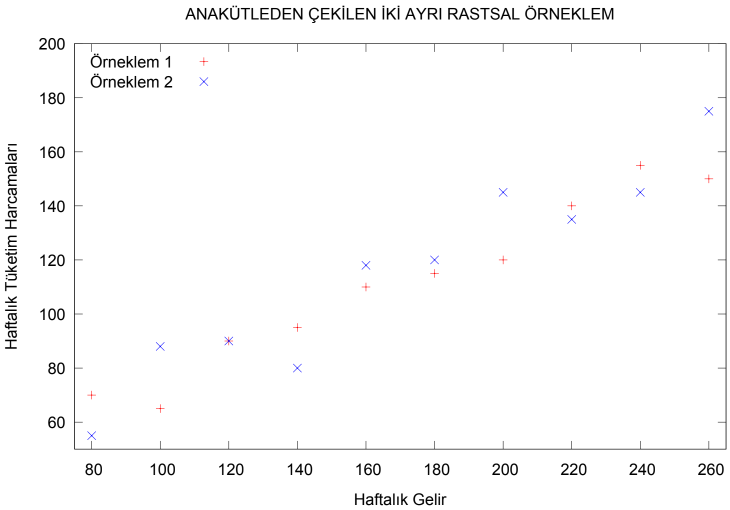
Örneklem Bağlanım İşlevi

Anakütleden her biri 10 gözlem büyüklüğünde iki farklı rastsal örneklem çekelim:

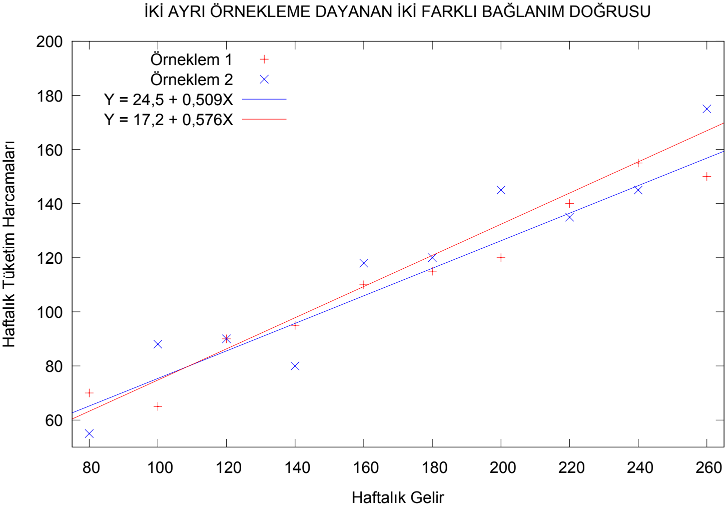
Çizelge: Anakütleden Çekilmiş İki Rastsal Örneklem

X	Y	X	Y
80	70	80	55
100	65	100	88
120	90	120	90
140	95	140	80
160	110	160	118
180	115	180	120
200	120	200	145
220	140	220	135
240	155	240	145
260	150	260	175

Örneklem Bağlanım İşlevi



Örneklem Bağlanım İşlevi



Örneklem Bağlanım İşlevi ve Rastsallık

- Anlaşılıyor ki rastsallık nedeniyle örneklem verilerini kullanarak anakütle bağlanım işlevini tam doğru biçimde tahmin etmek olanaksızdır.
- Elimizdeki iki değişik örneklem bağlanım doğrusundan hangisinin gerçek anakütle bağlanım doğrusunu daha iyi temsil ettiği kesin değildir.
- Genel olarak, n farklı örneklem için n sayıda farklı ÖBİ bulunabilir diyebiliriz.

Örneklem Bağlanım İşlevinin Bulunması

- Açıklamış olduğumuz tahmin sorunu yüzünden örneklem bağlanım işlevi aşağıdaki gibi gösterilir:

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i + \hat{u}_i$$

- Burada:

  $\hat{\beta}_1$ "β_1 şapka" (β_1 hat) diye okunan β_1'in tahmincisini,
  $\hat{\beta}_2$ β_2'nin tahmincisini,
  $\hat{u}_i$ u_i'nin tahmincisini göstermektedir.

Örneklem Bağlanım İşlevinin Bulunması

- Anakütle bağlanım işlevini başta $Y_i = 17 + 0{,}6X_i + u_i$ olarak hesaplamış olduğumuzu anımsayalım.
- Bulduğumuz birinci örneklem bağlanım işlevi şudur:
$$Y_i = 24{,}5 + 0{,}509X_i + \hat{u}_i$$
- Bulduğumuz ikinci örneklem bağlanım işlevi ise şudur:
$$Y_i = 17{,}2 + 0{,}576X_i + \hat{u}_i$$
- Örneklem bağlanım işlevlerinin her ikisi de β_1 "değiştirge" (parameter) değerini yüksek tahmin ederken, β_2 değiştirge değerini düşük tahmin etmiştir.
- O zaman buradaki önemli soru, ABİ bilinemese bile $\hat{\beta}_1$'nın gerçek β_1'e ve $\hat{\beta}_2$'nın da gerçek β_2'ye olabildiğince yakın olduğu bir ÖBİ'nin nasıl oluşturulabileceği sorusudur.

Örneklem Bağlanım İşlevinin Bulunması

Gujarati'nin sözleriyle:

> *"Burada vurguladığımız, ABİ'yi olabildiğince doğru yansıtan ÖBİ'nin nasıl kurulacağını söyleyen süreçler geliştirebileceğimizdir. ABİ'yi asla gerçekten belirleyemesek bile, bunun yapılabileceğini düşünmek heyecan vericidir."*

- Bu heyecanlı tartışmayı burada şimdilik sonlandırıyoruz.

Önümüzdeki Dersin Konusu

Önümüzdeki ders

SEK tahmincilerinin türetilmesi