BÖLÜM 9

VARYANS, KAREKÖK ORTALAMA, OPERATÖRLER, ÖZFONKSİYONLAR, ÖZDEĞERLER

$x_i - \langle x \rangle$ ≡ i.'nci ölçümün ortalama $<x>$ değerinden olan sapması

$\langle x_i - \langle x \rangle \rangle$ ≡ Ortalama $<x>$ değerinden ortalama sapma

Ancak bir kutudaki parçacık için, $\langle x_i - \langle x \rangle \rangle = 0$ dır.

$(x_i - \langle x \rangle)^2$ ≡ i.'nci ölçümün ortalama $<x>$ değerinden olan sapmasının karesi

$$\left\langle \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2 \right\rangle \equiv \sigma_x^2 \equiv x' \text{ de varyans}$$

$$\boxed{\left\langle \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2 = \sigma_x^2} \quad \text{şeklinde yazılır.}$$

Karekök Ortalama veya Standard Sapma, aşağıdaki gibi yazılır.

$$\boxed{\sigma_x = \left[\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2\right]^{1/2}}$$

x ölçümündeki belirsizlik (Δx), bir kutudaki parçacık için σ_x

$$\boxed{\Delta x = \sigma_x}$$

olarak ifade edilir.

$$\sigma_x^2 = \int_0^a \psi^*(x) x^2 \psi(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx$$
$$= \left(\frac{2}{a}\right) \int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx - \left[\left(\frac{2}{a}\right) \int_0^a x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx\right]^2$$

Belirli integrali alındığında

$$\Rightarrow \qquad \sigma_x^2 = \left[\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2(n\pi)^2}\right] - \left[\frac{a^2}{4}\right]$$

$$\sigma_x^2 = \frac{a^2}{4(n\pi)^2}\left[\frac{(n\pi)^2}{3} - 2\right]$$

$$\boxed{\Delta x = \sigma_x = \frac{a}{2(n\pi)}\left[\frac{(n\pi)^2}{3} - 2\right]^{1/2}} \qquad \text{olur.}$$

Sapmanın a ile arttığına ve n ' ye zayıfça bağlı olduğuna dikkat ediniz.

Nihayet, Heisenberg Belirsizlik İlkesini, bir kutudaki parçacık için denemek istiyoruz.

$$\Delta p = \sigma_p = \left[\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2\right]^{1/2}$$

ifadesini elde etmek için $\langle p\rangle$ ve $\langle p\rangle^2$'ye ihtiyacımız vardır. Ancak

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, p\, \psi(x)\, dx \qquad \text{yazabilirmiyiz?}$$

buraya ne yazmalıyız?

Şimdi bir OPERATÖR kavramına ihtiyacımız var.

$$\hat{A} f(x) = g(x)$$

operatör, yeni bir fonksiyon elde etmede fonksiyon üzerinde etkilidir.

Örneğin;

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{3}\right) = \left(\frac{2x}{3}\right)$$

operatör fonksiyon yeni fonksiyon

Özel Durum

$$\hat{A}f(x) = \underbrace{a}_{\text{sayı (sabit)}}\, f(x) \qquad \text{ise}$$

$f\ (x)$, operatörün özfonksiyonu olarak adlandırılır ve a, özdeğerdir. Bu problem, özdeğer problemi olarak bilinir (lineer cebirdeki gibi).
Kuantum mekaniği, operatör ve özdeğer problemleri ile doludur!

Örneğin; Schrödinger denklemi:

$$\underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]}_{\substack{\hat{H}\ \text{operatörü} \\ \text{(Hamilton)}}} \underbrace{\psi(x)}_{\text{Özfonksiyon}} = \underbrace{E}_{\text{sabit}}\ \psi(x) \qquad \text{dir}$$

veya $\boxed{\hat{H}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)}$ (tek boyutlu) ile $\boxed{\hat{H}\psi = E\psi}$ dir.

Özfonksiyon üzerinde etkili olan Hamilton operatörü, enerji belirtir yani, Hamilton bir enerji operatörüdür.

$$V(x) = 0 \quad \text{ise} \quad E = \text{K.E.} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{olur.}$$

$$\therefore \qquad \hat{H} = \frac{(\hat{p})^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad (\hat{p})^2 = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$(\hat{p})^2$, $(\hat{p})(\hat{p})$ demektir yani, operatör fonksiyon üzerinde sırayla uygulanır.

$$(\hat{p})^2 f(x) = (\hat{p})(\hat{p}) f(x) = \hat{p}\left[\hat{p} f(x)\right] = \hat{p}\left[g(x)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad (\hat{p})(\hat{p}) = \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}}$$ Momentum operatörü (tek boyutlu)

Bir kutudaki parçacık için

$$\sigma_p^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \left\langle p \right\rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)^2 \psi(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi(x) dx\right]^2$$

Şimdi sıralamanın çok önemli olduğuna dikkat ediniz! Operatör, sadece sağında kalan fonksiyon üzerinde etkilidir.

$$\begin{aligned}
\left\langle p \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \psi(x) dx \\
&= \int_0^a \left[\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \left[\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle p^2 \right\rangle &= \int_0^a \left[\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) \left[\left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] dx \\
&= \frac{2\hbar^2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2\hbar^2}{a}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \\
&= \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Tahmin edildiği gibi $\left\langle p^2 \right\rangle = \dfrac{n^2 h^2}{4a^2} = 2m\dfrac{n^2 h^2}{8ma^2} = 2mE$ dir.

$V(x) = 0$ olduğundan $E = K.E.$ dir.

$$\sigma_p^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{a^2} = \left(\Delta p\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta x \Delta p = \frac{a}{2(n\pi)}\left[\frac{(n\pi)^2}{3} - 2\right]^{1/2} \frac{n\pi\hbar}{a} = \frac{\hbar}{2}\underbrace{\left[\frac{(n\pi)^2}{3} - 2\right]^{1/2}}_{\text{daima > 1'dir.}}$$

Heisenberg Belirsizlik İlkesi'nden beklenildiği gibi

$\therefore \qquad \Delta x \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$ dir.