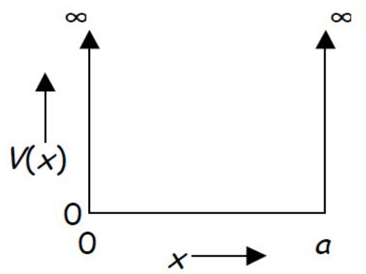
BÖLÜM 8

BİR KUTU İÇİNDE KUANTUM MEKANİK PARÇACIK

Şimdiye kadar anlatılanların özeti:



$$V\left(x<0,\ x>a\right)=\infty \qquad \psi\left(x<0,\ x>a\right)=0$$

$$V\left(0\le x\le a\right)=0 \qquad \psi_n\left(0\le x\le a\right)=B\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$E_n=\frac{n^2h^2}{8ma^2} \qquad k=\frac{n\pi}{a} \qquad \lambda=\frac{2a}{n} \qquad n=1,2,3,\ldots$$

$\psi\,(x)$ “dalga fonksiyonu” nedir?

Max Born yorumu:

$$\left|\psi\left(x\right)\right|^2=\psi^*\left(x\right)\psi\left(x\right)$$

bir parçacık için olasılık dağılımı veya olasılık yoğunluğudur.

$\therefore\ |\psi\,(x)|^2\,dx$, parçacığın x ile $x + dx$ aralığı arasında bulunma olasılığıdır.

Bu, doğada gördüğümüz esaslı bir değişimdir! Biz sadece, bir ölçüm sonucunun olasılığını bilebiliriz – bunu da her zaman kesin olarak bilemeyiz. Doğada “deterministik” olan nedir diye tekrar düşünmeliyiz.

Kolay akıl yürütme : Dalga fonksiyonunun normalizasyonu

$$\Rightarrow \quad \int_{x_1}^{x_2}\left|\psi\left(x\right)\right|^2dx\ = \quad \text{Parçacığın bir aralıkta bulunma olasılığı}$$

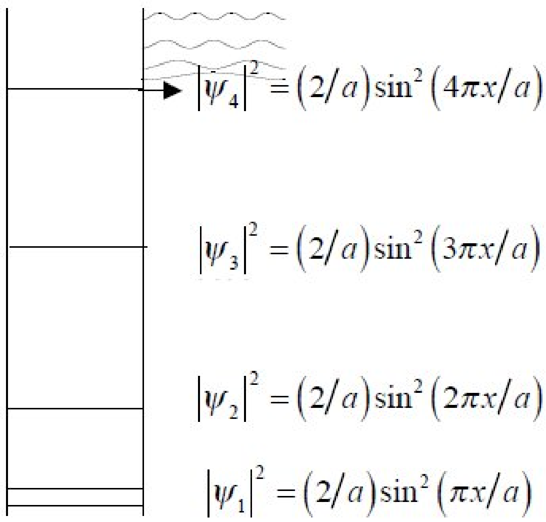
Parçacığın belli bir yerde toplam bulunma olasılığı 1 olmalıdır.

Bir kutudaki tek bir parçacık için,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi(x)\right|^2 dx = \int_0^a \left|\psi(x)\right|^2 dx = 1$$ Normalizasyon koşulu

$$\int_0^a B^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots}$$ Normalleştirilmiş dalga fonksiyonu

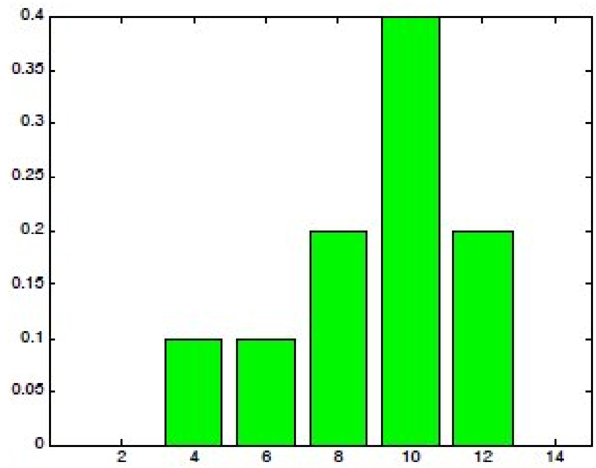


$|\psi(x)|^2$'nin yorumu ölçüme bağlıdır.
Bir konumdaki her ölçüm bir sonuç verir.
Pek çok ölçüm, sonuca ait bir olasılık dağılımı verir.

Tahminî veya ortalama değerler

Farklı bir olasılık dağılımı için:

Örnek;



$\langle x \rangle$ = x'in ortalama değeri

= 4(0.1) + 6(0.1) + 8(0.2) + 10(0.4) + 12(0.2)

= $4(P_4) + 6(P_6) + 8(P_8) + 10(P_{10}) + 12(P_{12})$

Burada P_x, "x" değerini veren ölçümlerin olasılığıdır.

$$\Rightarrow \quad \langle x \rangle = \sum x P_x$$

Şimdi de sürekli olasılık dağılımına geçelim:

$$P_x \rightarrow |\psi(x)|^2 dx$$
$$\sum \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \quad \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

Benzer şekilde

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

olur.

Bağıntı genellikle “sandviç” formunda yazılır.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x^2\, \psi(x)\, dx$$

Bir kutudaki parçacık için

$$\langle x \rangle = \frac{2}{a} \int_0^a x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx$$

$\rightarrow$ $\boxed{\langle x \rangle = \frac{a}{2}}$

ya göre integral alınırsa

Ortalama parçacık konumu, kutunun ortasındadır.