

BÖLÜM 24

PAULI SPİN MATRİSLERİ

Elektron spini için dalga fonksiyonlarını tanımlamak biraz kullanışsız görünüyor. Çünkü elektron, 3B uzayda dönmek yerine sadece kendi berirlediği bir rotada dönüyor. Elektron spininin muhtemel iki hareketini göstermek üzere “ α ” ve “ β ” kısa hâllerini kullanıyoruz. Ancak, spin için klasik bir benzeri olmadığından “ α ” ve “ β ” dalga fonksiyonları diyemiyoruz. Kimyada bu duruma sıkça rastlanır. Biz daha çok, her biri ayrı çekirdeğe ve elektronlara sahip çok atomlu büyük moleküllerle ilgileniyoruz. Tabii ki bir kerede bu parçacıkların hepsini tanımlayan dalga fonksiyonunu ortaya koymanın imkânsız olduğu aşikârdır. Tek parçacık için bile yeterince zordur! Böyle durumlarda, dalga fonksiyonu veya operatörün gerçek uzayda nasıl görüldüğüne açıkça bakmaksızın operatör ve dalga fonksiyonlarının birlikte kullanıldığı **kısa** bir ifade kullanmak en kullanışlısıdır. Bunun için kullanılan en mükemmel araç, **Matris Mekanik**i (şimdiye kadar kullanılan dalga mekaniğinin aksine) olarak adlandırılır. Matris mekaniğinin nasıl işlediğini göstermek için spine ait basit bir örneği kullanalım.

Basit fikir şudur: Herhangi bir elektron spin hâlini, α ve β gibi iki hâlin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazabiliriz:

$$\psi \equiv c_\alpha \alpha + c_\beta \beta$$

Şimdilik, elektron dalga fonksiyonunun (örneğin; ψ ' nin açısal ve radyal kısımları) uzaysal kısmını ihmal ettiğimizi belirtelim. Her hâlin hep aynı şekilde yazılacağından nasıl emin olacağımızı sorabilirsiniz. Kendinizi ikna etmek için bunun sadece bu hâl için doğru olduğunu düşünün. Spini “yukarı” (“aşağı”) yönlenmiş bir elektronun bulunma olasılığı $|c_\alpha|^2$ ($|c_\beta|^2$) dir. Bu şekilde yazılamayan bir hâl söz konusu ise bu hâlin $\psi \equiv c_\alpha \alpha + c_\beta \beta + c_\gamma \gamma$ şeklinde başka bir spin hâline (γ) karşılık geldiği düşünülmelidir.

Ancak bu durumda, spini γ olan bir elektronun gözlenme olasılığı $|c_\gamma|^2$ olacaktır. Fakat elektronun, gözlemlenen sadece iki tane spin hâli bulunduğundan bu durumun deneysel olarak imkânsız olduğunu bilebiliriz.

Matris mekaniğinde temel fikir, **dalga fonksiyonunun bir vektörle değiştirilmesidir**:

$$\psi \equiv c_\alpha \alpha + c_\beta \beta \rightarrow \Psi \equiv \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix}$$

Bu, fiziksel (x,y,z) uzayda bir vektör olmayıp sadece ψ ' yi tanımlayan katsayıları düzenlemek için uygun bir yöntemdir. Özellikle, bilgisayarlar vektörler konusunda çok usta olduklarından bir bilgisayara dalga fonksiyonu koymak için güzel bir yöntemdir.

Şimdi amacımız, ψ dalga fonksiyonu ile yapmak istediğimiz bir şeyi, Ψ vektörüyle yapabileceğimiz hâle getirmek için herşeyi uygun hâle çevirmektir. Bunu adım adım yaparken birkaç kurala da değineceğiz.

İntegraller, nokta çarpımlarla değiştirilir. Herhangi iki dalga fonksiyonu arasındaki örtüşmenin, vektörler arasında, değiştirilmiş bir nokta çarpımı şeklinde yazılabildiğini

$$[\equiv d_1 \alpha + d_2 \beta]$$

ifade edelim. Örneğin;

ise

$$\begin{aligned} \int \phi^* \psi d\sigma &= d_\alpha^* c_\alpha \int \alpha^* \alpha d\sigma + d_\alpha^* c_\beta \int \alpha^* \beta d\sigma + d_\beta^* c_\alpha \int \beta^* \alpha d\sigma + d_\beta^* c_\beta \int \beta^* \beta d\sigma \\ &= d_\alpha^* c_\alpha + d_\beta^* c_\beta \\ &= \begin{pmatrix} d_\alpha^* & d_\beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} \\ &\equiv \Phi^\dagger \cdot \Psi \end{aligned}$$

yazılır. Son satırda, bir vektörün **eşleniği** tanımlandı:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\dagger \equiv (x_1^* \quad x_2^*)$$

Böylece dalga fonksiyonunun karmaşık bir konjügasyonu, bir vektörün eşleniği ile değiştirilmiştir. Çapraz vektör almamız gerektiğini ve onun karmaşık konjügatı olmaması gerektiğini belirtelim. Aksi takdirde bir örtüşme olduğunda, (sütun) x (sütun) değeri elde edilecek ve satır sayısı ile sütunlar eşleşmeyecektir.

Bu kurallar, dalga fonksiyonlarının normalizasyon ve ortogonalliğinin doğal tanımını vektörler cinsinden yapmamızı sağlar:

$$\int \psi^* \psi d\sigma = 1 \rightarrow \Psi^\dagger \cdot \Psi = \begin{pmatrix} c_\alpha^* & c_\beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} = |c_\alpha|^2 + |c_\beta|^2 = 1$$

ve

$$\int \phi^* \psi d\sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \phi \cdot \psi = \begin{pmatrix} d_\alpha^* & d_\beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} = d_\alpha^* c_\alpha + d_\beta^* c_\beta = 0$$

Son olarak, ortalama değerleri hesaplayacak, özdeğer denklemlerini çözecek, v.b. şekilde, operatörleri matris mekaniğindeki hâller üzerinde kullanmak istiyoruz. Operatörleri nasıl göstermek gerektiğini kavramak için dalga mekaniği operatörlerini bir dalga fonksiyonundan diğer dalga fonksiyonuna aktaralım. Örneğin, momentum operatörü, bir dalga fonksiyonunu dikkate alır ve orijinal dalga fonksiyonunun türevi olan yeni bir dalga fonksiyonuna dönüştürür:

$$\psi(x) \xrightarrow{\hat{p}} \frac{d\psi}{dx}(x)$$

Böylece operatörlerin, matris mekaniğinde benzer etkiyi yapmaları için operatörleri bir vektörden diğer vektöre çevirmeliyiz. Sonuçlarına bakılırsa bu, bir matrisi tanımlayan en temel özelliktir: vektörleri vektörlere dönüştürür. Böylece son kuralımıza da ulaştık: Operatörler, matrislerle gösterilir.

Örnek olarak, $\hat{S}_z$ operatörü, spin uzayında 2x2 matrisle ifade edilecektir:

$$\hat{S}_z \rightarrow \mathbf{S}_z \equiv \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

Bu matrisin elemanlarını (yani soru işaretlerini) henüz tanımlamadık ancak bu matrisin gereken bütün özelliklere sahip olduğunu görebiliriz: vektörler, vektörlere ayrılmış

$$\hat{S}_z \psi = \psi' \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha' \\ c_\beta' \end{pmatrix}$$

ve ortalama değerler numaralara ayrılmıştır.

$$\int \psi^* \hat{S}_z \psi d\sigma \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_\alpha^* & c_\beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_\beta \end{pmatrix}$$

Bir sorun şudur: Hangi matrisin verilen operatöre ait olduğunu tanımlamaktır. Bir başka deyişle, yukarıda soru işaretli verilen yerleri doldurmamız gerekmektedir. Bir alıştırma olması bakımından, $\hat{S}^2, \hat{S}_z, \hat{S}_x$ ve $\hat{S}_y$ matris gösterimlerini kullanarak bunun nasıl yapıldığını göstereceğiz:

$\hat{S}^2$ ile başlayalım. $\hat{S}^2$ 'nin, α ve β dalga fonksiyonları üzerinde nasıl etkisi olduğunu biliyoruz.

$$\hat{S}^2 \alpha = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha \quad \hat{S}^2 \beta = \frac{3}{4} \hbar^2 \beta$$

Şimdi $\hat{S}^2$ 'yi, elemanları bilinmeyen bir matris olarak gösterelim.

$$\mathbf{S}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

Dalga mekaniğinde, $\hat{S}^2$ 'nin α üzerine etkisi, özdeğeri verir, çünkü α , $\hat{S}^2$ 'nin özfonksiyonudur (özdeğeri olan). Bu ifade, matris mekaniğine çevrilerek, $\vec{a}$ vektörü, $\mathbf{S}^2$ matrisiyle çarpıldığında ($\mathbf{S}^2 \times \vec{a}$), aynı özdeğer $\times \vec{a}$ değerini bulmalıyız:

$$\hat{S}^2 \alpha = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha \rightarrow \mathbf{S}^2 \vec{a} = \frac{3}{4} \hbar^2 \vec{a}$$

Bu şekilde özfonksiyonları konuşmak yerine matris mekaniğinde özvektörlerden bahsediyoruz ve $\vec{a}$, $\mathbf{S}^2$ 'nin bir özvektörüdür diyoruz.

Bu bilgi, $\mathbf{S}^2$ matrisinde bilinmeyen sabitleri elde etmek için kullanılabilir:

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \alpha = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha &\rightarrow \mathbf{S}^2 \vec{a} = \frac{3}{4} \hbar^2 \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$c = \frac{3}{4} \hbar^2 \quad e = 0$$

β üzerinde işlem yaparak

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 \beta = \frac{3}{4} \hbar^2 \beta &\rightarrow \mathbf{S}^2 \vec{a} = \frac{3}{4} \hbar^2 \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \hbar^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Böylece,

$$d = 0 \quad f = \frac{3}{4} \hbar^2 \quad \text{sonucu elde edilir.}$$

$\mathbf{S}^2$ için aşağıdaki ifadeye ulaşırız:

$$\boxed{\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\hat{S}_z$ de benzer şekilde türetilebilir. $\hat{S}_z$ ' nin özdeğerlerinin

$$\hat{S}_z \alpha = \frac{\hbar}{2} \alpha \quad \hat{S}_z \beta = -\frac{\hbar}{2} \beta \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

Böylece matris,

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \alpha = \frac{\hbar}{2} \alpha \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{ifadesini sağlamalıdır.}$$

Sonuçta $c = \frac{\hbar}{2}$ $e = 0$ olur.

β üzerinde benzer işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \beta = -\frac{\hbar}{2} \beta \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \\ d = 0 \quad f &= -\frac{\hbar}{2} \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir. Bu sonuçlar toparlandığında $\hat{S}_z$ matris gösterimine ulaşmış oluruz.

$$\boxed{\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Şimdi, biraz daha hüner gerektiren $\hat{S}_x$ ve $\hat{S}_y$ 'yi elde etmemiz gerekir.

Açısal momentuma ait operatör türetmesinden hatırladığımız kadarıyla, $\hat{S}_x$ ve $\hat{S}_y$ 'yi artan ve azaltan operatörler cinsinden tekrar yazabiliriz:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-)$$

Bu ifadeden, $\hat{S}_+ \beta = c_+ \alpha$ $\hat{S}_+ \alpha = 0$ ve $\hat{S}_- \alpha = c_- \beta$ $\hat{S}_- \beta = 0$ olduğunu biliyoruz.

Burada c_+ ve c_- tayin edilmesi gereken sabitlerdir. Bu sebeple artırma operatörü için

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ \beta = c_+ \alpha \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_+ \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{S}_+ \alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow d = c_+ \quad f = 0 & & \Rightarrow c = 0 \quad e = 0 \end{aligned}$$

ve azaltma operatörü için

$$\begin{aligned} \hat{S}_- \alpha = c_- \beta \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ c_- \end{pmatrix} & \hat{S}_- \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow c = 0 \quad e = c_- & & \Rightarrow d = 0 \quad f = 0 \end{aligned}$$

ifadelerine ulaşırız.

Böylece

$$\mathbf{S}_+ = c_+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_- = c_- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{olur.}$$

Böylece $\mathbf{S}_x$ ve $\mathbf{S}_y$ için aşağıdaki ifadeleri buluruz:

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_- & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_y = \frac{1}{2i}(\mathbf{S}_+ - \mathbf{S}_-) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ic_+ \\ ic_- & 0 \end{pmatrix}$$

Sadece c_+ ve c_- sabitlerini tayin etmemiz gerekir. Bunu çok az bilgi kullanarak yapabiliriz.

Önce, $\mathbf{S}_x$ ve $\mathbf{S}_y$ 'nin gözlemlenebilir yani Hermit olması gerektiğini not edelim. Böylece

$$\begin{aligned} \int \alpha^* \hat{S}_x \beta d\sigma &= \left(\int \beta^* \hat{S}_x \alpha d\sigma \right)^* \quad \rightarrow \quad (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}c_+ \\ \frac{1}{2}c_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left((0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}c_+ \\ \frac{1}{2}c_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^* \\ \Rightarrow c_+ &= c_-^* \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu sonuç, çabalarımızı, aşağıda belirtilenler cinsinden bir sabiti (c_+) bulmaya indirger.

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_+^* & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ic_+ \\ ic_+^* & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{S}_x$ ve $\mathbf{S}_y$ 'nin, eşleniklerine eşit değerde ilginç özellikleri bulunduğunu belirtelim:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_+^* & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_+^* & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_x \\ \mathbf{S}_y^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ic_+ \\ ic_+^* & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -ic_+ \\ ic_+^* & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_y \end{aligned}$$

Bu özellik, genel olarak doğrudur: Hermit operatörleri, kendi eşleniklerine eşit matrislerle gösterilirler. Kendi kendine eşit matrisler, bu sebeple Hermit matrisleri olarak adlandırılır ve eşlenik işlem, bazen Hermit konjügasyonu olarak adlandırılır.

Kalan sabitleri bulmak için $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_x^2 + \mathbf{S}_y^2 + \mathbf{S}_z^2$ olgusunu kullanırız. Bu bilgi, $\mathbf{S}_y$, ve $\mathbf{S}^2$ için matris gösterimlerinde yer aldığında

$$\begin{aligned}
\frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_+^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_+^* & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -ic_+ \\ ic_+^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ic_+ \\ ic_+^* & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{|c_+|^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{|c_+|^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} \hbar^2 = \frac{\hbar^2}{4} + \frac{|c_+|^2}{4} + \frac{|c_+|^2}{4} \\
&\Rightarrow |c_+|^2 = \hbar^2 \\
&\Rightarrow c_+ = \hbar
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

Son satırda, c_+ 'nin işaretinde keyfî bir seçim yaptık. Böylece $\mathbf{S}_x$ ve $\mathbf{S}_y$ için son ifadelere ulaşmış olduk:

$$\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Özet olarak, spin operatörleri için matris gösterimleri:

$$\boxed{\mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

, $\mathbf{S}_y$ ve $\mathbf{S}_z$ gösterimlerini kullanarak, bazı lineer cebir ifadelerindeki gibi herhangi bir özelliği hesaplayabiliriz. Örneğin; $\mathbf{S}_x$ ve $\mathbf{S}_y$ 'nin komutatörlerini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y] &= \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y - \mathbf{S}_y \mathbf{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{\hbar^2}{4} \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right] = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow [\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y] = i\hbar \mathbf{S}_z
\end{aligned}$$

Açısal momentum operatörlerini gösteren matrislerin, açısal momentuma ait komutasyon bağıntılarına uyduğunu görmek rahatlatıcıdır. Benzer şekilde, $\mathbf{S}_y$ ve $\mathbf{S}_z$ özdeğerlerini hesaplayarak $\hat{S}^2, \hat{S}_z$ ve $\hat{S}_x$ özdeğerlerini hesaplamak mümkündür. Ortalama değerler, (satır)*×(matris)×(sütun) çarpımlarından elde edilebilir. Böylece, bu operatörlerle ne

istersek hesaplayabilecek bir konumdayız. Sonuçlarına bakıldığında, 2×2'lik bir matriste herhangi bir operatör $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, ve $\mathbf{S}_z$ ' nin doğrusal kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

Yani, bir anlamda biz, spin $\frac{1}{2}$ sistemleri hakkında muhtemel istenebilecek bütün bilgilere sahibiz.

Pauli'nin onuruna, $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, ' nin boyutsuz biçimi (yani $\hbar/2$ öncü terimi olmaksızın), geleneksel olarak Pauli spin matrisleri şeklinde tanımlanmıştır:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli spin matrislerinin (veya eşdeğer, $\mathbf{S}_x$ ve $\mathbf{S}_z$ matris gösterimleri) kullanışlı olmasının sebeplerinden biri, matris mekaniğini kullanmadaki becerimizi denemek için mevcut en basit durumda olmasıdır. İleride görebileceğimiz gibi, daha karmaşık sistemler de matris-vektör işlemleriyle tanımlanabilmektedir. Ancak bu tür durumlarda matrisler, pek çok elemana, bazen sonsuz sayıda elemana sahip olmaktadır! Bundan dolayı, daha karmaşık durumlara geçmeden önce basit 2×2' lik matrislerle alıştırmak en doğrusudur.