

BÖLÜM 18

AÇISAL MOMENTUM

$\hat{\mathbf{L}}^2$ ve $\hat{L}_z$ komute olduğundan ortak özfonksiyonları paylaşırlar. Bu fonksiyonlar, açısal momentum problemlerinin tanımlanması için son derece önemli olup açısal momentumun izin verilen değerlerini ve rijit rotor gibi sistemlerde, sistem için mevcut enerjileri tanımlar. Bilmemiz gereken ilk husus, özdeğerlerin, kendilerine ait özfonksiyonlar ile ilişkili olduğudur. $\hat{\mathbf{L}}^2$ ve $\hat{L}_z$ için özdeğerler sırasıyla α ve β ile gösterilip aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_\alpha^\beta(\theta, \phi) = \alpha Y_\alpha^\beta(\theta, \phi) \quad \hat{L}_z Y_\alpha^\beta(\theta, \phi) = \beta Y_\alpha^\beta(\theta, \phi)$$

Sadeleştirmek için öz durumların θ ve ϕ ye bağıllığını ihmal edersek yukarıdaki eşitlik

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_\alpha^\beta = \alpha Y_\alpha^\beta \quad \hat{L}_z Y_\alpha^\beta = \beta Y_\alpha^\beta$$

halini alır. Burada, artırma ve azaltma operatörlerini tanımlamak uygun olur (Harmonik osilatöre benzerliğine dikkat ediniz):

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$

Bu eşitlik, komutasyon bağıntılarını karşılar.

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm \quad [\hat{L}_\pm, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$$

Bu bağıntıların ispatı, daha önceden türetilmiş bağıntılar kullanarak son derece kolaydır:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \quad [\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$$

Örneğin:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \pm i[\hat{L}_z, \hat{L}_y] \\ &= i\hbar\hat{L}_y \pm i(-i\hbar\hat{L}_x) = \pm\hbar(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) \\ &= \pm\hbar\hat{L}_\pm \end{aligned}$$

Artırma ve azaltma operatörleri, $\hat{L}_z$ ' nin özdeğeri üzerine özel bir etkiye sahiptir:

$$\hat{L}_z(\hat{L}_\pm Y_\alpha^\beta) = ([\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] + \hat{L}_\pm \hat{L}_z) Y_\alpha^\beta = (\pm\hbar\hat{L}_\pm + \hat{L}_\pm \beta) Y_\alpha^\beta = (\beta \pm \hbar)(\hat{L}_\pm Y_\alpha^\beta)$$

Böylece $\hat{L}_+$ ($\hat{L}_-$), $\hat{L}_z$ ' nin özdeğerini sonuçta adını $\hbar$ kadar artırır (azaltır). Artırma ve azaltma operatörleri $\hat{\mathbf{L}}^2$ ile komute olduğundan α ' nın değerini değiştirmezler ve dolayısıyla

$$\hat{L}_\pm Y_\alpha^\beta \propto Y_{\alpha'}^{\beta \pm \hbar}$$

yazılabilir ve $\hat{L}_z$ ' nin özdeğerleri aşit aralıklıdır!

Özdeğerlerin bu basamağındaki kısıtlamalar nelerdir? Tekrar harmonik osilatör hatırlanırsa, artırma operatörünün en düşük duruma ardışık uygulanmasıyla oluşturulabilen minimum özdeğer ve öz durumlarına ulaşılmıştı. Buradaki durumda da bir minimum özdeğer vardır. Bunu görmek için

$$\langle \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \rangle = \langle \hat{L}_x^2 \rangle + \langle \hat{L}_y^2 \rangle \geq 0$$

ifadesini yazalım. Bu sonuç, basit bir gerçeği yansıtmaktadır: Hangi operatör alınırsa alınsın karesi alındığında pozitif sayı elde edilmelidir. $\hat{L}_x^2$ veya $\hat{L}_y^2$ 'nin ortalama değeri için negatif bir değer elde etmek, $\hat{L}_x$ veya $\hat{L}_y$ için hayali bir özdeğer anlamına gelir ki bu durum, operatörler Hermit olup mümkün değildir. Bunun yanı sıra hayalî açısal momentumun anlamı nedir? Şimdi yukarıdaki eşitliği, özel bir dalga fonksiyonu (Y_α^β) için uygulayalım:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int Y_\alpha^{\beta*} (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2) Y_\alpha^\beta = \int Y_\alpha^{\beta*} (\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2) Y_\alpha^\beta \\ &= \int Y_\alpha^{\beta*} (\alpha - \beta^2) Y_\alpha^\beta \\ &= \alpha - \beta^2 \end{aligned}$$

$\beta^2 \leq \alpha$ ve $-\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$ dir. Bunun anlamı, β , verilen bir α değeri için minimum ve maksimum değerlerin ikisini de alabilir. Bu değerleri, sırasıyla $\beta_{\max}$ ve $\beta_{\min}$ şeklinde gösterirsek

$$\hat{L}_+ Y_\alpha^{\beta_{\max}} = 0 \quad \hat{L}_- Y_\alpha^{\beta_{\min}} = 0$$

olacağı açıktır.

Artık α ve $\beta_{\max}$ (veya $\beta_{\min}$) arasındaki ilişkiyi tanımlamak için bu bilgiyi ve bazı cebirsel hileleri kullanabiliriz. Önce aşağıdaki ifadeleri yazalım:

$$\Rightarrow \hat{L}_- \hat{L}_+ Y_\alpha^{\beta_{\max}} = 0 \quad \hat{L}_+ \hat{L}_- Y_\alpha^{\beta_{\min}} = 0$$

Bu ifadeyi, $\hat{L}_x$ ve $\hat{L}_y$ cinsinden genişletelim:

$$\Rightarrow (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i(\hat{L}_y \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y)) Y_\alpha^{\beta_{\max}} = 0 \quad (\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + i(\hat{L}_y \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y)) Y_\alpha^{\beta_{\min}} = 0$$

Ancak bu ifadeler, operatörlerle türetilmiş en uygun ifadeler değildir. Çünkü Y_α^β üzerinde etkili olduğunda $\hat{L}_x$ ve $\hat{L}_y$ 'nin ne vereceğini bilmiyoruz. Fakat, aynı ifadeyi, $\hat{L}^2$ ve $\hat{L}_z$ cinsinden tekrar yazabiliriz:

$$\underbrace{(\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2)}_{\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2} \pm i \underbrace{(\hat{L}_y \hat{L}_x - \hat{L}_x \hat{L}_y)}_{-i\hbar \hat{L}_z}$$

ve sonra aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z) Y_{\alpha}^{\beta_{\max}} &= 0 & (\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z) Y_{\alpha}^{\beta_{\min}} &= 0 \\
\Rightarrow (\alpha - \beta_{\max}^2 - \hbar \beta_{\max}) &= 0 & (\alpha - \beta_{\min}^2 + \hbar \beta_{\min}) &= 0 \\
\Rightarrow \alpha &= \beta_{\max}(\beta_{\max} + \hbar) = \beta_{\min}(\beta_{\min} - \hbar) \\
\Rightarrow \beta_{\max} &= -\beta_{\min} \equiv \hbar l
\end{aligned}$$

Burada son satırda, boyutsuz yeni bir değişken (l) tanımlamış olduk ($\hbar$ 'nin açısal momentum birimine sahip olduğuna dikkat ediniz). Bu minimum ve maksimum değerler birleştirildiğinde $-\hbar l \leq \beta \leq \hbar l$ elde edilir. Ayrıca, artırma operatörünü ardarda uygulayarak $\hbar$ kadar artışlarla en düşük ve en yüksek özdeğeri elde edebildiğimiz için en yüksek ve en düşük özdeğerler arasındaki farkın, $[\hbar l - (-\hbar l)] = 2\hbar l$ şeklinde $\hbar$ 'in tam katları olacağı açıktır. Böylece, $2l$ 'nin kendisi tamsayı veya yarım tamsayı olmalıdır.

Bütün bu sonuçları bir araya getirdiğimizde aşağıdaki ifade elde edilir ($m \equiv \beta / \hbar$) :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2 Y_l^m &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m & l &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \\
&\text{ve} \\
\hat{L}_z Y_l^m &= m \hbar Y_l^m & m &= -l, -l+1, \dots, l-1, l
\end{aligned}$$

Burada, α 'yı l ile, β 'yı m ile değiştirince Y_{α}^{β} de Y_l^m oldu. Ayrıca, ilk eşitlikte $0 \leq \langle \hat{\mathbf{L}}^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$ ifadesinden $l \geq 0$ olur. Bu ifadeler, açısal momentumun bütün formları için temel özdeğer eşitlikleridir.

Burada, rijit rotorda gördüğümüzden farklı bir durum olduğuna dikkat edelim. Yani:

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

di

r. Hatırlatmak amacıyla, rijit rotor için J kuantum sayısı, yukarıda tanımlanan l kuantum sayısına eş değerdir. Burada, enerjinin J 'ye bağıllığı ($E \propto J(J+1)$), $\hat{\mathbf{L}}^2$ için yapılan türetmeden bulunan ile aynıdır. $1/2I$ faktörü, rijit rotor Hamiltonyenin, $\hat{\mathbf{L}}^2$ 'den ziyade $\hat{\mathbf{L}}^2/2I$ olması gerçeğinden kaynaklanır. Gerçek farklılık, J 'nin **yarım tamsayı değerlerinin rijit rotor için gözlenmemesidir**. Başlangıçta, yukarıda yapılan türetmede hata yaptığımızı, l 'nin yarım tamsayı değil bir tamsayı olması gerektiğini düşünebilirsiniz. Ancak bu bir hata değildir. Farklılık, yukarıda yapılan türetmenin **açısal momentum herhangi bir tipi için geçerli olmasından** kaynaklanır. Böylece, açısal momentumun belirli

tipleri (örneğin; rijit rotor için oluşmaz) için belirli l değerleri gözlenmezken açısal momentumun başka tipleri için gözlenebilmektedir. Özellikle elektronlar, değeri $l = 1/2$ olan gerçek spin açısal momentuma sahiptir. Böylece, münferit sistemler, l 'nin izin verilen değerleri üzerinde ilave kısıtlamalara sahipken açısal momentum durumları daima yukarıda verilen özdeğer ilişkilerine uymaktadır.