

BÖLÜM 11

KUANTUM MEKANIĞİNİN İLKELERİ (devamı)

KOMUTATÖRLER

Çoklu operatör uygulandığında işlem sırasını sayar.

Örneğin;

$$\hat{A} = \hat{p}\hat{x} = ? \quad \text{ve} \quad \hat{p}\hat{x} = \hat{x}\hat{p} \text{ yazabilirmiyiz?}$$

⇒ İfadeyi elde etmek için fonksiyon üzerinde çalışalım:

$$\begin{aligned} \hat{A}f(x) = g(x) &\Rightarrow (\hat{p}\hat{x})f(x) = \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)(x)f(x) \\ &= -i\hbar x \frac{d}{dx}f(x) - i\hbar f(x) = \left(-i\hbar x \frac{d}{dx} - i\hbar\right)f(x) \\ \therefore \hat{A} &= \left(-i\hbar x \frac{d}{dx} - i\hbar\right) = (\hat{p}\hat{x}) \end{aligned}$$

Şimdi

$\hat{B} = \hat{x}\hat{p}$ diyelim.

$$\begin{aligned} \hat{B}f(x) &= (x)\left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right)f(x) = \left(-i\hbar x \frac{d}{dx}\right)f(x) \\ \therefore \hat{B} &= -i\hbar x \frac{d}{dx} = \hat{x}\hat{p} \\ \therefore \hat{x}\hat{p} &\neq \hat{p}\hat{x} \end{aligned}$$

Bir komutatör belirleyelim.

\hat{A} ve \hat{B} gibi iki operatör için

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{C}$$

← sıfır olması gerekmez!

örneğin;

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar \neq 0!$$

Komutatörlerle ilgili önemli genel ifadeler:

1) Komutasyon gerektiren operatörler için

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$$

- Her iki operatör için eş zamanlı özfonksiyonu olan bir dizi dalga fonksiyonu bulmak mümkündür.

Örneğin;

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n \quad \underline{\text{ve}} \quad \hat{B}\psi_n = b_n\psi_n$$

şeklinde ψ_n dalga fonksiyonu bulabiliriz.

- Bunun anlamı, gözlemlenebilen A ve B ' nin her ikisinin de eş zamanlı olarak gerçek değerlerini bilebiliriz (belirsizlik sınırlaması yok).

2) Komutasyon gerektirmeyen operatörler için

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$$

- Her iki operatör için eş zamanlı özfonksiyonu olan bir dizi dalga fonksiyonu bulmak mümkün değildir.
- Bunun anlamı, gözlemlenebilen A ve B ' nin her ikisinin de eş zamanlı olarak gerçek değerlerini bilemeyiz \Rightarrow Belirsizlik!

Örneğin;

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$