18.701 Cebir 1

2007 Güz

Özel Üniter Grubun Geometrisi

1 Grup

SU_2 grubunun öğeleri matrisi 1 olan 2×2 üniter matrislerdir. Bu matrislerin $\bar{a}a+\bar{b}b=1$ olmak üzere şu şekilde yazılabileceği kolayca görülür:

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

(Bu ders kitabındaki matrisin devriğidir) Grup öğeleri aynı zamanda $\mathbb{R}^4$ uzayında $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ denklemini sağlayan (x_0,x_1,x_2,x_3) noktalarından oluşan 3-boyutlu birim küre S^3'ün noktalarına karşılık gelir.

SU_2 ve S^3 arasındaki bu karşılık $a=x_0+x_1i$ ve $b=x_2+x_3i$ ile verilir. Bu iki küme arasında rahatça geçiş yapıp matris ve vektörü aynı grup elemanının iki farklı gösterimi gibi düşüneceğiz. Böylece her grup elemanı hem bir matrisle hem de birim küre üzerinde bir noktayla temsil edilir. Matris gösterimi gruptaki cebirsel işlemler için daha uygundur çünkü matris çarpımı iyi bilinmektedir. Öte yandan vektör gösterimi skaler çarpım gibi geometrik işlemleri yapmaya daha elverişlidir.

$$\begin{array}{ccccc} & SU_2 & \longleftrightarrow & S^3 & \\ P = & \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & (x_0,x_1,x_2,x_3) & = X \\ & \text{cebir} & & \text{geometri} & \end{array} \tag{1.2}$$

Herşeyi $\mathbb{R}^4$ uzayındaki vektörler cinsinden yazmak mümkündür. Bir PQ çarpımının gerçel ve sanal kısımları iki vektörün girdileri cinsinden yazılabilir ancak bu formüllerden birşey anlamak zor görünüyor. Biz matris gösterimini esas alacağız.

Matrisler ve vektörler arasında $a=x_0+x_1i$ ve $b=x_2+x_3i$ kurallarının tanımladığı (1.2) gönderimi, $\bar{a}a+\bar{b}b=1$ ve $x_0^2+\cdots+x_3^2=1$ şartlarını düşürsek de birebir-örten kalır. Gelişigüzel $\bar{a}a+\bar{b}b$ değerine sahip (1.1) matrisleri dört boyutlu bir *gerçel* vektör uzayı oluşturur. Eğer Q matrisi V uzayının başka bir elemanıysa, $c=y_0+y_1i$ ve $d=y_2+y_3i$ olmak üzere

$$Q = \begin{pmatrix} c & -\bar{d} \\ d & \bar{c} \end{pmatrix} \longleftrightarrow (y_0,y_1,y_2,y_3) = Y \tag{1.3}$$

yazabiliriz. Dört boyutlu V gerçel uzayı üzerinde şu skaler çarpımı tanımlayalım

$$\langle P,Q\rangle = x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = X^tY. \tag{1.4}$$

Bu çarpımla birlikte V bir Öklid uzayı olur. Skaler çarpımı matrisler cinsinden de ifade edebiliriz:

Önerme 1.5 *(i) Eğer P,Q matrisleri V uzayının elemanlarıysa, $\langle P,Q\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(P^*Q)$.*
(ii) Her U üniter matrisi için, $\langle UPU^*,UQU^*\rangle=\langle P,Q\rangle$.

Lemma 1.6 *$a = x_0+x_1 i$ ve $c = y_0+y_1 i$ iki karmaşık sayı ise, $\frac{1}{2}(\bar{a}c+a\bar{c}) = x_0y_0+x_1y_1$ olur.*

Önerme 1.5'in kanıtı. (i) Bu basit bir hesapla çıkar:

$$P^*Q = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -\bar{d} \\ d & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}c + \bar{b}d & * \\ * & b\bar{d} + a\bar{c} \end{pmatrix}.$$

Dolayısıyla $\mathrm{tr}(P^*Q) = \bar{a}c + \bar{b}d + b\bar{d} + a\bar{c} = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ buluruz.
(ii) şıkkı (i)'den çıkar: U üniter bir matris olduğu için $U^* = U^{-1}$ ve

$$(UPU^*)^*(UQU^*) = U(P^*Q)U^*$$

bulunur. Eşlenik matrislerin izi (trace) aynı olduğundan $\mathrm{tr}(U(P^*Q)U^*) = \mathrm{tr}(P^*Q)$ elde edilir. $\square$

Şimdi $\mathbb{R}^4$ uzayındaki x_0 eksenini "dikey" eksen gibi düşünelim. Kürenin *kuzey kutbu* $(1,0,0,0)$ noktasıdır; matris gösterimi altında bu nokta I birim matrisiyle temsil edilir. Öbür standart birim vektörlerin matris temsiliyse şöyle verilir:

(1.7)
$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (1,0,0,0)$$

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \longleftrightarrow (0,1,0,0)$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (0,0,1,0)$$

$$\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow (0,0,0,1)$$

Böylece $(\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ vektörleri V öklid uzayının bir ortonormal tabanını verir.

Bunu kullanmayacağız, ama yine de kaydedelim: $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ matrisleri kuantum mekaniğindeki *Pauli matrislerini* sanal birim $\pm i$ ile çarparak elde edilebilirler. Bunun yanı sıra $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -\mathbf{1}$ ve $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji}$ bağıntılarını sağlarlar. Bu bağıntılar bir *kuaternion cebri* tanımlar. Yani SU_2 bir kuaternion cebrinin birim vektörler kümesidir.

(1.1) matrisinin izi $a + \bar{a} = 2x_0$ eder, dolayısıyla karakteristik polinomu şu gerçel polinomdur:

(1.8)
$$t^2 - 2x_0t + 1.$$

Bu polinomun kökleri, çarpımları 1 eden $\lambda, \bar{\lambda}$ eşlenik karmaşık sayılarıdır çünkü $-1 \le x_0 \le 1$ sağlanır. Bu kökler birim çember üzerinde yer alırlar.

Önerme 1.9 *Bir $P \in SU_2$ matrisinin özdeğerleri $\lambda, \bar{\lambda}$ olsun. Öyle bir $U \in SU_2$ bulunur ki $U^{-1}PU = U^*PU$ matrisi şu köşegen matristir:*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Bu önerme için normal operatörlerin Spektral Teoremini kullanan bir kanıt verilebilir, ya da doğrudan şöyle gösterilebilir: P'nin birim uzunlukta ve λ özdeğerli bir $(u, v)^t$ özvektörü olsun. O zaman $(-\bar{v}, \bar{u})^t$ vektörü $\bar{\lambda}$ özdeğerli bir başka özvektör olur ve

$$U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$$

matrisinin SU_2 grubunun bir öğesi olduğu çıkar. $PU = U\Lambda$ sağlandığından $\Lambda = U^{-1}PU$ elde edilir. □

2 Enlemler.

Kürenin $\{x_0 = c\}$ $(-1 \leq c \leq +1)$ şeklinde yatay bir kesitine bir *enlem* denir. Matris gösteriminde, bu kesit $\{\mathrm{tr}(P) = 2c\}$ ile verilir. Grubun her elemanı yegane bir enlemde içerilir.

Önerme 1.9'u enlemler cinsinden ifade edersek şu sonuca ulaşırız:

Netice 2.1 *Enlemler SU_2 grubunun eşlenik sınıflarıdır.* □

Bir enlem denklemi, birim kürenin denkleminde $x_0 = c$ koyarak bulunur:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 - c^2). \tag{2.2}$$

Bu denklem üç boyutlu $\{x_0 = c\}$ yatay altuzayının içinde iki-boyutlu ve $\sqrt{(1 - c^2)}$ yarıçaplı bir küre tanımlar. Uç durumlardan birinde, $c = 1$ için enlem tek bir noktaya, kuzey kutbuna indirgenir. Keza diğer uç durumda, yani $c = -1$ için enlem $-I$ matrisine, yani güney kutbuna indirgenir.

Ekvator enlemi; $x_0 = 0$ veya $\mathrm{tr}(P) = 0$ denklemiyle tanımlanır ve E ile gösterilir. Bu enleme basitçe *ekvator* diyeceğiz. Ekvator üzerindeki bir nokta $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$ olacak şekilde şöyle yazılabilir:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 i & -z_2 + z_3 i \\ z_2 + z_3 i & -z_1 i \end{pmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad (0, z_1, z_2, z_3). \tag{2.3}$$

Uzunluğun birim olması şartını düşürürsek (2.3) matrisleri V uzayının $\mathrm{tr}(A) = 0$ denklemiyle tanımlanan üç boyutlu bir V_0 altuzayını oluşturur.

(1.4) formunu V_0 uzayına kısıtlarsak üç boyutlu bir öklid uzayı ve bu uzayın bir $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ ortonormal tabanını elde ederiz. Yukarıdaki A matrisi bir $z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$ doğrusal bileşimi olarak yazılabilir. Ekvator üç-boyutlu V_0 uzayındaki iki boyutlu birim kümedir.

Bir karmaşık matris $A^* = -A$ şartını sağlıyorsa *çarpık-hermisyendir* denir. V_0 uzayı 2×2 boyutlu, sıfır izli çarpık-hermisyen matrislerden oluşur.

Not: Bir A matrisinin çarpık-hermisyen olması için iA matrisinin hermisyen olması gerekir ve yeter.

Önerme 2.4 *Bir $A \in SU_2$ matrisi için şu şartların hepsi denktir:*
(a) $\mathrm{tr}(A) = 0$ *(A ekvatordadır),*
(b) A'nın özdeğerleri $\pm i$'dir,
(c) $A^2 = -I$.

Kanıt. Karakteristik polinomun şeklinden (1.8) kolayca (a) ve (b) şıklarının denkliği görülür. Eğer λ sayısı A için bir özdeğerse o zaman λ^2 sayısı A^2 için bir özdeğerdir. SU_2'da -1 özdeğerli yegane matris $-I$ olduğundan $A^2 = -I$ şartı $\lambda = \pm i$ şartına denktir. □

3 Boylamlar

$\mathbb{R}^4$ uzayının kuzey kutbunu içeren 2-boyutlu bir W altuzayı verilsin. SU_2 grubundaki birim küre ile W altuzayının kesişimi olan L kümesine SU_2 grubunun bir *boylamı* denir. Bu boylam W'daki birim çemberden ibarettir ve $\mathbb{S}^3$ küresindeki "büyük çember"; yani enbüyük yarıçaplı$(= 1)$ bir çemberdir. $\pm I$ dışında her $P \in SU_2$ yegane bir boylam üzerindedir çünkü (I, P) vektörleri iki-boyutlu W altuzayının bir tabanını oluşturur. $\pm I$ matrisleri her boylamda yer alır.

Önerme 3.1 $\mathbb{R}^4$ *uzayının I noktasını içeren 2-boyutlu bir W altuzayı olsun ve W'deki birim vektörlerin boylamı L olsun.*
(i) L boylamı, ekvator E'yi $\pm A$ noktalarında keser.
(ii) (I, A) ikilisi W'nin bir ortonormal tabanıdır.
(iii) L boylamı $P_\theta = \cos\theta\, I + \sin\theta\, A$ şeklinde parametrize edilir.
(iv) Boylamlar SU_2'nun eşlenik altgruplarıdır.

Kanıt. (i) İki-boyutlu W uzayıyla üç-boyutlu $\{x_0 = 0\}$ uzayının kesişimi bir-boyutludur ve birim uzunlukta iki vektör içerir.

(ii) $I = (1, 0, 0, 0)$ vektörüne dik bir birim vektör $(0, y_2, y_3, y_4)$ şeklindedir ve E üzerinde yer alır, ve bunun tersi de doğrudur.

(iii) Her θ için P_θ birim uzunluktadır çünkü A ve I iki ortogonal birim vektördür. Dolayısıyla W'daki birim çember P_θ tarafından parametrize edilir.

(iv) Ekvatordaki bir A noktasını içeren bir L boylamı olsun. Önerme 1.9'dan A'nın $\boldsymbol{k}$ elemanına eşlenik olduğu çıkar. $\boldsymbol{k} = U^*AU$ olsun. O zaman $U^*P_\theta U = \cos\theta I + \sin\theta \boldsymbol{k}$ boylamı $\boldsymbol{k}$'yı içerir; bu boylamı $L_{\boldsymbol{k}}$ ile gösterelim. L'nin $L_{\boldsymbol{k}}$'ya eşlenik olduğunu gördük. Dahası $L_{\boldsymbol{k}}$ boylamı SU_2'daki gerçel matrislerden oluşur, yani düzlemdeki dönmelerin grubu olan SO_2 grubudur:

$$(3.2) \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad (\cos\theta, 0, \sin\theta, 0).$$

$L_{\boldsymbol{k}}$ boylamı SU_2'nun altgrubu olduğundan, eşleniği $UL_{\boldsymbol{k}}U^*$ da bir altgruptur. (Alıştırma olarak P_θ'nın çarpma altında kapalılığını doğrudan göstermenizi tavsiye ederim.)

Boylamlar arasında $\cos\theta I + \sin\theta \boldsymbol{i}$ kayda değer bir yere sahiptir. Bu boylam SU_2'daki köşegen matrislerden oluşur:

$$(3.3) \qquad \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad (\cos\theta, 0, \sin\theta, 0).$$

Boylamlardan $\boldsymbol{j}$'yi içereni daha önce karşılaşmadığımız bir altgruptur.

4 Ortogonal temsil

Ekvator enlemi E iki-boyulu bir küredir. E aynı zamanda SU_2'da bir eşlenik sınıfı olduğundan SU_2 grubu E üzerinde eşlenik alarak etkir. Grubun bir U elemanıyla eşlenik alma işleminin kürenin bir *dönmesinden* ibaret olduğunu göstereceğiz (Aslında U ile eşlenik alma her enlemi döndürür).

Eğer B bir 2×2 çarpık-hermisyen ve sıfır izli matris ve $U \in SU_2$ ise UBU^* matrisi de çarpık-hermisyen ve sıfır izlidir. Bunu siz gösterebilirsiniz. Dolayısıyla SU_2 ile eşlenik alma V_0 uzayı üzerinde bir dönüşüm tanımlar. "U ile eşlenik alma" dönüşümünü ϕ_U ile gösterelim. Tanım itibarı ile çarpık-hermisyen ve sıfır izli B matrisleri üzerinde $\phi_U(B) = UBU^*$ olur.

Teorem 4.1 *(i) Her $U \in SU_2$ için, ϕ_U dönüşümü V_0 öklid uzayının bir dönmesidir.*
(ii) $\phi : U \in SU_2 \to \phi_U \in SO_3$ gönderimi örten bir grup izomorfizmidir ve çekirdeği SU_2 grubunun merkezi $Z = \{\pm I\}$'dir.
(iii) $A \in E$ olmak üzere $U = \cos\theta I + \sin\theta A$ ise ϕ_U dönmesi A vektörünü içeren eksen etrafında 2θ açılık bir dönmedir.

Birinci İzomorfizm Teoreminden, yukarıdaki teoremin (ii) kısmıyla birlikte SO_3 grubunun SU_2/Z bölüm grubuna, yani Z'nin eşkümeleri grubuna izomorf olduğunu görülür. PZ eşkümesi $\pm P$ matrislerinden oluşur. Dolayısıyla SO_3'ün elemanları üç-boyutlu SU_2 küresinin merkeze göre zıt yönde duran nokta çiftlerine karşılık gelir. Böylece SO_3 grubu üç boyutlu $\mathbb{R}P^3$ gerçel izdüşel uzayının aynı olur ve SU_2 grubu da bu uzayın ikili örtüsü haline gelir.

Kanıt. Dönmeler birim determinantlı ortogonal doğrusal dönüşümlerdir. Bu tanımın ϕ_U tarafından sağlandığını göstermemiz gerekiyor.

ϕ_U'nun doğrusal bir dönüşüm olması için, $\phi_U(A + B) = \phi_U(A) + \phi_U(B)$ eşitliği sağlanmalıdır ve her r gerçel sayısı için $\phi_U(rA) = r\phi_U(A)$ olmalıdır. Bunu göstermesi çok kolay.

Ancak, ϕ_U'nun ortogonalliği bariz değil ve bir 3×3 gerçel matris olan ϕ_U'nun matrisini hesaplamak pek hoş değil. Dolayısıyla ortogonalliğini göstermek için ϕ_U'nun doğrusal bir dönüşümün ortogonal olma şartını sağladığını, yani

$$(4.2) \qquad \langle \phi_U(A), \phi_U(B)\rangle = \langle A, B\rangle$$

eşitliğinin her $A, B \in V_0$ için doğru olduğunu gösterelim. Ama bu Önerme 1.5 (ii)'den çıkar ve iddia edildiği gibi ϕ_U ortogonaldir.

Geriye ϕ_U'nun determinantının 1 olduğunu göstermek kalıyor. Artık biliyoruz ki ϕ_U ortogonaldir, yani determinantı $+1$ ya da -1 olmalıdır. Şimdi ϕ_U dönüşümü ve determinantı U'nun sürekli fonksiyonudur. $U = I$ için ϕ_U birim dönüşümdür dolayısıyla determinantı 1'dir. SU_2 grubu yol-bağlantılı olduğundan her $U \in SU_2$ elemanının determinantının 1 olduğunu görürüz.

(ii) ϕ'nin bir homomorfizm olduğunu göstermek rutin bir iştir: Her $U, V \in SU_2$ için, $\phi_{UV}(B) = \phi_U(\phi_V(B))$ eşitliğini göstermemiz gerekiyor. ϕ'nin tanımını yazacak olursak bunun $(UV)B(UV)^* = U(VBV^*)U^*$ bariz eşitliğinden ibaret olduğu görülüyor.

Şimdi ϕ'nin çekirdeğinin Z olduğunu gösterelim. Eğer U çekirdekteyse, U ile eşlenik alma E'nin her elemanını sabitler, bu da U'nun E'nin her elemanıyla değişmeli olduğunu gösterir. Önerme 3.1'e göre SU_2'nun her P elemanı $A \in E$ olacak şekilde $P = cI + sA$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla U matrisi P ile de değişmeli olmalıdır. Yani çekirdek SU_2'nun merkezi olmalıdır. Bir elemanın merkezde olması için eşlenik sınıfının bir tek elemandan ibaret olması gerekir. Eşlenik sınıflarının birer enlem olduğunu biliyoruz. Tek elemandan ibaret enlemler $\{I\}$ ve $\{-I\}$ olduğuna göre merkez $Z = \{\pm I\}$'dir.

Her α açısı 2θ şeklinde yazıldığından ϕ'nin örtenliğini teoremin (iii) kısmını gösterince kanıtlamış olacağız.

(iii) Eğer $U = cI + sA$ ise, U ile A değişmelidir ve ϕ_U dönüşümü $\pm A$ matrislerini sabitler. ϕ_U'nun kutupları $\pm A$ matrisleridir.

Dönme açısını bulmak için şu yolu izleyelim: E'nin bir başka A' elemanı verilsin ve $U' = cI + sA'$ olsun. E bir eşlenik sınıfı olduğundan $\phi_Q(A) = QAQ^{-1} = A'$ eşitliğini sağlayan bir $Q \in SU_2$ vardır. Bu durumda $\phi_Q(U) = QUQ^{-1} = U'$ eşitliği de sağlanır. ϕ bir homomorfizm olduğundan $\phi_Q \phi_U \phi_Q^{-1} = \phi_{U'}$ olur. Burada ϕ_Q dönmesi, ϕ_U dönmesinin A kutbunu ϕ'_U dönmesinin A' kutbuna götürür. Dolayısıyla $\phi_{U'} = \phi_Q \phi_U \phi_Q^{-1}$ eşleniği A' kutbu etrafında aynı açıda bir dönmedir.

Buradan yalnız bir $A \in E$ matrisinin dönme açısını bulmanın bize yeteceği sonucu çıkıyor. $A = \boldsymbol{k}$ seçerek sorunu (3.2)'deki gerçel matris olan $U = cI + s\boldsymbol{k}$ durumuna indigeriz. ϕ_U'nun matrisi R'yi $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ tabanında hesaplayalım. Şimdi $c' = \cos 2\theta$ ve $s' = \sin 2\theta$ dersek

$$U\boldsymbol{i}U^* = c'\boldsymbol{i} + s'\boldsymbol{j} \quad , \quad U\boldsymbol{j}U^* = -s'\boldsymbol{i} + c'\boldsymbol{j} \quad , \quad U\boldsymbol{k}U^* = \boldsymbol{k} \tag{4.3}$$

buluruz ve R matrisinin üç sütununu elde ederiz:

$$R = \begin{pmatrix} c' & -s' & 0 \\ s' & c' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

İddia edildiği gibi $\boldsymbol{k}$ ekseni etrafında 2θ açılık dönmenin matrisi R'dir. □

5 Spin

E'nin birim-olmayan bir dönmesinin kutupları E'nin dönme ekseniyle kesiştiği ve dönmenin sabitlediği iki noktadır. Dönme için bir kutup seçimine *spin* denir. Yani birim eleman dışında SO_3'nin her elemanının iki spini vardır.

Önerme 3.1 (iii)'de verilen parametrik denklem bir $P \in SU_2$ elemanının ($P \neq \pm I$) belirlediği ϕ_P dönmesi için bir kutup seçmemize imkan verir.

$P = \cos\theta\, I + \sin\theta\, A$ için kutuplar $\pm A$ noktalarıdır. Tutarlı bir kutup seçimi yapmak için, $P_t = \cos t\, I + \sin t\, A$ formülüne bakalım. ϕ_P'nin spini olarak θ ve $-\theta$'nın hangisi $(0, \pi)$ aralığına düşüyorsa onu seçelim.

Geometrik olarak, P'yi içeren L boylamını P'ye olan açısal mesafenin π'den küçük olduğu doğrultuda yönlendirdik ve spin olarak L'nin ekvator E'yi ilk kestiği noktayı seçtik.

Netice 5.1 *ϕ homomorfizmi SU_2 grubunun $\pm I$ haricindeki elemanlarıyla kürenin bariz olmayan dönmelerinin spin kümeleri arasında birebir eşleme tanımlar.*

Bu netice yüzünden SU_2, *spin grubu* diye de adlandırılır. SU_2'nun bir grup olmasının ilginç bir getirisi var: spinleri çarpabiliriz. ρ ve ρ' kürenin iki gelişigüzel eksen etrafında dönmesi olsun. Dönmeler SO_3'ün elemanı olduğundan, bileşke dönüşüm $\rho\rho'$ da bir dönmedir. Şimdi iki dönme için birer spin seçersek, geometrik olarak $\rho\rho'$ dönmesinin bir spininin veya kutbunun, nasıl seçileceği belli değildir. Ancak SU_2 bir grup olduğu için, aslında $\rho\rho'$ dönmesinin spini belirlidir.