18.701 Cebir 1
2007 Güz

Karmaşık Vektör Uzaylarının Geometrisi

Stereografik izdüşüm.

$\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının koordinatları $u_0, ..., u_n$ olsun. Bu uzayda

$$u_0^2 + \cdots + u_n^2 = 1$$

birim vektörlerinin mahalline *n-boyutlu küre* adı verilir, ve ekseriyetle S^n ile gösterilir. Kürenin boyutu n, üzerindeki bir noktanın serbestlik derecelerinin sayısıdır. Böylece S^2 bildik 3 boyutlu uzaydaki olağan birim küredir, S^1 de düzlemdeki birim çemberdir.

Stereografik izdüşüm küreyi resmetmeye yarar, özellikle 3-boyutlu küre S^3 için kullanışlıdır. Stereografik izdüşüm altında n-boyutlu kürenin noktaları, $u_0 = 0$ denkleminin tanımladığı n-boyutlu H hiperdüzleminin noktalarına birebir gönderilir. Gelenek böyle olmasa da ilk koordinat olan u_0 ile "dikey" ekseni göstermeyi tercih ederim. *Kuzey kutbu* adı verilen $(1, 0, \ldots, 0)$ noktası kürenin tepesinde yer alır. S^n küresi üzerindeki bir $p = (u_0, ..., u_n)$ noktasının Stereografik izdüşümü kuzey kutbuyla p noktasından geçen doğrunun H hiperdüzlemini kestiği nokta olarak tanımlanır. Bu izdüşüm, tanımsız olduğu kuzey kutbu dışında birebir örtendir. Kuzey kutbunun "sonsuza" gönderildiği söylenir.

İzdüşümde kullanılan doğruyu $(t(u_0 - 1) + 1, tu_1, ..., tu_n)$ şeklinde parametrize edersek H ile kesiştiği nokta şöyle verilir:

$$(0, y_1, ..., y_n) = (0, \frac{u_1}{1 - u_0}, ..., \frac{u_n}{1 - u_0}).$$

Şimdi $r^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$ yazarak ters fonksiyonun $(0, y_1, ..., y_n)$ noktasını

$$(u_0, ..., u_n) = (\frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}, \frac{2y_1}{r^2 + 1}, ..., \frac{2y_n}{r^2 + 1}).3$$

noktasına götürdüğü görülür.

Karmaşık Vektör Uzayı $\mathbb{C}^n$.

Karmaşık vektör uzayını $\mathbb{C}^n$i V ile gösterelim. Bir $X = (x_1, ..., x_n)^t$ karmaşık vektörünün koordinatlarını $x_\nu = a_\nu + b_\nu i$ şeklinde yazıp $A = (a_1, ..., a_n)^t$ ve $B = (b_1, ..., b_n)^t$ dersek X vektörünü $X = A + Bi$ şeklinde gerçel ve sanal kısımlarına ayırabiliriz. Bu yolla her karmaşık n-boyutlu X vektörü bir gerçel n-boyutlu vektör çiftine, veya $2n$-boyutlu bir gerçel vektöre karşılık gelir. Uzun vadede farklı bir gerçel vektör ortaya atmak pek iyi olmaz, ama şimdilik böyle yapıp bu $2n$-boyutlu gerçel vektörü $\mathbb{X}$ ile gösterelim. Bu $2n$-boyutlu gerçel vektörün a_ν, b_ν girdilerinin nasıl sıralanmış olduğu önemsizdir. Biz $\mathbb{X} = (a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n)^t$ sıralamasını kullanacağız.

Böylece $\mathbb{C}^n$ ile $\mathbb{R}^{2n}$ arasında doğal bir birebir-örten gönderim bulunduğunu görmüş olduk. Bu bir vektör uzayı izomorfizmi değildir, çünkü $\mathbb{C}^n$ için skalerler karmaşık sayılar cismiyken $\mathbb{R}^{2n}$ için reel sayılar cismidir.

Vektör uzayı $\mathbb{C}^n$ üzerinde i ile çarpma $\mathbb{R}^{2n}$ üzerinde bir doğrusal operatör tanımlar, bu operatötün matrisi 2×2 bloktan oluşan $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ matrisidir, burada I harfi $n \times n$ birim matrisi göstermektedir. $J^2 = -I$ bağıntısını kaydedelim.

Hermisyen geometri.

Karmaşık sayıların geometrisinden kasıt karmaşık düzlemin, yani gerçel boyutu iki olan uzayın geometrisidir. Benzer şekilde n-boyutlu $\mathbb{C}^n$ karmaşık uzayının geometrisi derken mukabil $2n$-boyutlu gerçel uzayın geometrisini anlayacağız. Dolayısıyla bir X karmaşık vektörünün *uzunluğu* mukabil gerçel vektörün uzunluğu olarak tanımlanır, yani $|X|^2 = a_1^2 + b_1^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2$. Eğer $X^* = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)^t$ gösterimini kullanırsak uzunluğu şu formülle ifade edebiliriz:

$$|X|^2 = X^*X = \overline{x}_1 x_1 + \cdots + \overline{x}_n x_n.$$

Bu uzunluk formülü $V = \mathbb{C}^n$ uzayı üzerindeki *standart hermisyen çarpım*ının çıkış noktasıdır:

$$\langle X, Y \rangle = X^*Y = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n.$$

Bu çarpım şu özellikleri sağlar:

İkinci değişkene *doğrusal* bağımlılık: $\langle X, \Sigma c_\nu Y_\nu \rangle = \Sigma c_\nu \langle X, Y_\nu \rangle$.
İlk değişkene *eşlenik doğrusal* bağımlılık: $\langle \Sigma c_\nu X_\nu, Y \rangle = \Sigma \overline{c}_\nu \langle X_\nu, Y \rangle$.
Hermisyen simetri: $\langle Y, X \rangle = \overline{\langle X, Y \rangle}$.
Positiflik: Eğer $X \neq 0$ ise Xin uzunluk karesi $\langle X, X \rangle$ bir pozitif gerçel sayıdır.

Hermisyen çarpımın gerçel ve sanal kısımlarını gerçel vektörler cinsinden ifade etmek için daha önce de yaptığımız gibi $x_\nu = a_\nu + b_\nu i$ ve $y_\nu = c_\nu + d_\nu i$ yazalım, öyle ki $\mathbb{Y} = (c_1, d_1, ..., c_n, d_n)^t$ olsun. Şimdi $(a - bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad - bc)i$ sağlandığından, $\langle X, Y \rangle$ çarpımının gerçel kısmı

$$(a_1c_1 + b_1d_1) + \cdots + (a_nc_n + b_nd_n)$$

olur, ki bu değer gerçel vektörlerin $(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})$ skaler çarpımına eşittir. Sanal kısım ise

$$(a_1d_1 - b_1c_1) + \cdots + (a_nd_n - b_nc_n)$$

ile verilir ve X ve Y karmaşık vektörlerine mukabil gerçel vektörler cinsinden

$$[\mathbb{X}, \mathbb{Y}] = -\mathbb{X}^t J \mathbb{Y}$$

çarpık-simetrik bilineer formunun değeri olarak ifade edilebilir; burada J yukarıda adıgeçen matrisi, göstermektedir. Böylece

$$\langle X, Y\rangle = (\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}) + [\mathbb{X}, \mathbb{Y}]i$$

yazılabilir.

Özetlersek, hermisyen çarpımın gerçel kısmı mukabil gerçel vektörlerin skaler çarpımına, sanal kısmıysa gerçel vektörlerin bir çarpık-simetrik form altındaki değerine eşittir.

$\mathbb{C}^n$ uzayında vektörlerin *ortogonal* olmasın, standart hermisyen çarpıma göre tanımlanır: Eğer $\langle X, Y\rangle = 0$ ise X ve Y ortogonaldir denir. Eğer X karmaşık vektörü Y'ye ortogonalse $0 = \langle X, Y\rangle$ çarpımının gerçel kısmı $(\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y})$ skaler çarpımına eşit olduğundan $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$ de iki ortogonal (dik) gerçel vektördür. Ancak bu ortogonallik için yetmez çünkü sanal kısım $[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]$ de sıfırlanmalıdır.

Artık gerçel vektörler için özel simgeler kullanmayı bırakıp X ile hem karmaşık vektörü hem de mukabil gerçel vektörü göstereceğiz. Böylece yukarıdaki formülü

$$\langle X, Y\rangle = (X \cdot Y) + [X, Y]i$$

şeklinde yazabiliriz. Tek hatırlamamız gereken şey bu formülün sağında yer alan iki çarpımın değerlerinin gerçel olduğudur. Bu gösterime kendinizi alıştırmak için

$$[X, Y] = -(X \cdot iY)$$

formülünü doğrulayın. Burada en önemli nokta, ortogonalliğin artık iki anlamı bulunmasıdır: Karmaşık vektörlerin ortogonalliği (*karmaşık ortogonallik*) $\langle X, Y\rangle = 0$ anlamına geliyorken gerçel vektörlerin ortogonalliği (*gerçel ortogonallik*) $(X \cdot Y) = 0$ anlamına gelmektedir. Karmaşık ortogonallik daha güçlü bir şarttır.

$\mathbb{C}^n$ uzayında sıfır olmayan bir X vektörünün gerdiği bir-boyutlu altuzayı $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X)$ ile göstereceğiz, burada $\mathbb{C}$ işaretini gerçel vektörün gerdiği gerçel bir-boyutlu altuzayla karışmaması için kullanıyoruz. Bu altuzay X'in tüm karmaşık katları olan αX şeklindeki vektörlerden oluşmaktadır. Noktaları karmaşık düzlemin noktalarına birebir karşılık gelir.

Önerme. *X ve Y vektörlerinin karmaşık ortogonal olması için bir-boyutlu $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X)$ ve $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(Y)$ karmaşık altuzaylarından alınan her vektör çiftinin gerçel ortogonal olması gerek ve yeterlidir.*

Kanıt. Eğer X ve Y karmaşık ortogonalse $\langle X, Y\rangle = 0$ olur. Böylece her α, β karmaşık sayısı için $\langle \alpha X, \beta Y\rangle = \overline{\alpha}\beta\langle X, Y\rangle = 0$ sağlanır. İki altuzaydaki her vektör çifti karmaşık ortogonaldir, dolayısıyla gerçel ortogonaldir.

Öte yandan, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X)$'deki her vektörün $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(Y)$'deki her vektöre gerçel ortogonal olduğunu varsayalım. O zaman $(X \cdot Y) = 0$ ve $(X \cdot iY) = -[X, Y] = 0$ sağlanır. Yani $\langle X, Y\rangle = (X \cdot Y) + [X, Y]i = 0$ olur ki bu da X, Y vektörlerinin ortogonalliğini gösterir.

$\mathbb{R}^2$'nin geometrisi.

Karmaşık iki-boyutlu vektör uzayının geometrisini anlatmadan önce gerçel iki-boyutlu $\mathbb{R}^2$. uzayının geometrisini gözden geçirerek ısınalım.

$\mathbb{R}^2$ uzayı 2 boyutlu olduğundan, öz altuzayları 1 boyutludur. Bunlar orijinden geçen doğrulardır. Sıfırlanmayan her $X = (x_1, x_2)^t$ vektörü 1-boyutlu bir $\text{Span}_{\mathbb{R}}(X)$ altuzayı gerer ve bu altuzayın elemanları X'in gerçel katlarıdır.

Farklı 1-boyutlu aluzaylar sadece orijinde buluşur, dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ 1-boyutlu altuzayları tarafından paylanır, tabii eğer sıfır vektörünü bir kenara koyarsak.

Bir-boyutlu altuzaylar eğimleriye belirlenir. Eğer $W = \text{Span}_{\mathbb{R}}(X)$ ise W'nin eğimi is $\lambda = x_2/x_1$ ile verilir. Sonsuz dahil olmak üzere eğim her değeri alabilir.

Bu özel ∞ değeri bizim koordinat sistemi seçimimizin getirdiği hoş olmayan bir yan üründür. Stereografik izdüşüm altında eğimler, ve dolayısıyla $\mathbb{R}^2$'nin altuzayları S^1 çemberinin üzerindeki noktalara karşılık gelir, ki bu çok daha hoştur.

Çember için u_0, u_1 koordinatlarını kullanarak

$$\lambda = \frac{u_1}{1 - u_0}$$

ve

$$(u_1, u_2) = \left(\frac{|\lambda|^2 - 1}{|\lambda|^2 + 1}, \frac{2\lambda}{|\lambda|^2 + 1} \right)$$

elde edilir. Sonsuzdaki $\lambda = \infty$ eğimi kuzey kutbuna, yani $(1, 0)$ noktasına karşılık gelir. (Bu formüldeki mutlak değer işaretleri fazlalıktır. λ'nın karmaşık olduğu durumlarda da formülün çalışması için konmuştur)

Orijin dışında $\mathbb{R}^2$'nin her noktasının bir eğimi vardır, bu eğim stereografik izdüşümün tersi altında S^1 birim çemberi üzerinde bir noktaya gönderilir. Böylece orijin dışı heryerde tanımlı bir $\sigma : \mathbb{R}^2 \to S^1$ gönderimi vardır. Denklemini $\lambda = x_2/x_1$ yazarak bulabiliriz:

$$\sigma(X) = \left(\frac{\overline{x}_2 x_2 - \overline{x}_1 x_1}{\overline{x}_2 x_2 + \overline{x}_1 x_1}, \frac{2\overline{x}_1 x_2}{\overline{x}_2 x_2 + \overline{x}_1 x_1} \right).$$

(Yine bu formülü λ karmaşık olduğunda da çalışacak şekilde yazdım.)

σ'yı x-düzlemindeki $x_1^2 + x_2^2 = 1$ birim çemberine kısıtlayarak $x_1 = \cos\theta$ ve $x_2 = \sin\theta$ yazalım. Şu ifadeyi elde ederiz:

$$\sigma(X) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta).$$

Eğim-gönderimi x-düzlemindeki birim çemberi u-düzlemindeki birim çember üzerinde iki kez dolar.

$\mathbb{C}^2$'nin geometrisi.

Yukarıda söylenenler karmaşık duruma uyarlanabilir. $V = \mathbb{C}^2$ iki boyutlu bir karmaşık vektör uzayı olduğundan, her öz (karmaşık) W altuzayının boyutu birdir ve sıfırlanmayan herhangi bir vektörünün tüm karmaşık katlarından ibarettir. Eşit değillerse iki 1-boyutlu altuzay ancak orijinde buluşur. Yani sıfır vektörünü gözardı edersek V tek boyutlu altuzaylarınca paylanır, bunlardan herbiri bir $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X)$ karmaşık düzlemidir.

Gerçel durumda olduğu gibi, bir-boyutlu altuzaylar *eğimleriyle* ile belirlenir. Eğer $W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(X)$ ve $X = (x_1, x_2)^t$ ise, W'nin eğimi $\lambda = x_2/x_1$ olarak tanımlanır. Eğim W'daki sıfırlanmayan X vektörünün seçiminden bağımsızdır ve her karmaşık değeri alır, $x_1 = 0$ içinse değeri sonsuz olarak tanımlanır.

Stereografik izdüşümün tersi altında eğimler iki boyutlu S^2 birim küresi üzerindeki noktalara gönderilir. Eğer $\lambda = u_1+u_2 i$ dersek ve dikey ekseni u_0 ile gösterirsek $u_0^2+u_1^2+u_2^2 = 1$ birim küresinin denklemi melez $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ koordonatları cinsinden $|u_0|^2 + |\lambda|^2 = 1$ şeklinde yazılır ve bu koordinatlarda kuzey kutbu $(1, 0 + 0i)$ noktasıdır. Kutuptan izdüşüm için gerçel durumda bulduğumuz formüller şimdi karmaşık λ için de geçerli olur.

Hopf fibrasyonu.

$V = \mathbb{C}^2$ uzayının 1-boyutlu altuzaylarındaki birim uzunluklu vektörler 3-boyutlu birim kürede tuhaf bir görüntü arzeder. Daha önce yaptığımız gibi V'deki koordinatları $x_\nu = a_\nu + b_\nu i$ $(i = 1, 2)$ şeklinde yazarsak V'dek birim vektörlerin mahalli $\overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 = 1$ denklemiyle, veya $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 = 1$ ile tanımlanır.

Üç boyutlu S^3 birim küresinin bir -boyutlu W altuzayıyla kesişimi W içindeki C_W birim çemberini verir. Sıfır vektörünü gözardı edersek $\mathbb{C}^2$ uzayı bir boyutlu altuzaylarınca paylandığından, S^3 küresi de C_W birim çemberlerince paylanır. Bu acayip paylamaya *Hopf fibrasyonu* adı verilir ve hayalde canlandırması biraz zordur.

Karmaşık durumdaki $\sigma : S_x^3 \to S_u^2$ eğim gönderimi gerçel durumda elde edilenin benzeridir ancak çok daha ilginçtir. Bunun fibreleri C_W çemberleridir.

Hopf fibrasyonunun stereografik izdüşümü gerçel $\mathbb{R}^3$ uzayının bir fibrasyonunu verir. Biri dışında tüm fibreler birer çemberdir, özel fibre de dikey eksendir. Huan Yao tarafından izdüşürülmüş Hopf fibrasyonunu görselleştirmek için yazılan bir Matlab programı internette bulunmaktadır.