18.701 Cebir 1

2007 Güz

Problemler 6

1. Elemanları $0 \leq u \leq 1$ aralığı üzerindeki sürekli $f(u)$ fonksiyonlar olan $\mathcal{C}$ uzayı, $\mathbb{R}^n$ uzayının sonsuz boyutlu bir benzeridir. Aynı şekilde, $0 \leq u, v \leq 1$ karesi üzerindeki sürekli $A(u, v)$ fonksiyonları da matrislerin sonsuz boyutlu bir benzeridir. $\mathcal{C}$ üzerindeki *Fredholm operatörü,*

$$A \cdot f = \int_0^1 A(u, v) f(v) dv,$$

şeklinde tanımlanır ve bir vektörü bir matrisle çarpma işleminin benzeridir. (Bunu gözde canlandırmak için u, v-düzlemindeki birim kareyi ve $[0, 1]$ aralığını saat yönünde $90°$ çevirin.)
(a) A fonksiyonu $A(u, v) = u + v$ ile tanımlansın. Mukabil Fredholm operatörünün görüntüsünü açık seçik belirleyin ve çekirdeğini bazı integrallerin sıfırlanması cinsinden tasvir edin.
(b) Fredholm operatörünün sıfır dışındaki özdeğerlerini ve mukabil özvektörlerini bulun.

2. Karmaşık girdili ve $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin karakteristik polinomu $p(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots c_1 t + c_0$ olsun. Meşhur *Cayley-Hamilton Teoremi*

$$p(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots c_1 A + c_0$$

matrisinin sıfır matrisi olduğunu söyler.
(i) Teoremi bir 2×2 matris için hesapla kanıtlayın.
Cayley teoremi $n \times n$ matrisler için ifade ettikten sonra 2×2 durum için göstermiştir. Bahsini şu cümleyle kapatmıştır (ders kitabında da bu alıntı bulunabilir): "Genel durumdaki biçimsel ispat işine girişmenin gerekli olmadığını düşündüm"
(ii) Köşegenlemeyi kullanarak farklı özdeğerli $n \times n$ matrisler için teoremi kanıtlayın.
(iii) Her karmaşık $A = (a_{ij})$ matrisine istendiği kadar yakın ve farklı özdeğerli matrisler vardır; daha kesin bir dille ifade edersek her pozitif ϵ gerçel sayısı için, farklı özdeğerli bir $B = (b_{ij})$ matrisi bulunur, öyle ki her i, j için $|a_{ij} - b_{ij}| < \epsilon$ sağlanır. Üçgen biçimini kullanarak bunu gösterin.
(iv) Cayley-Hamilton Teoremini (ii) ve (iii) kullanarak ispatlayın.

3. Özdeğerleri farklı $n \times n$ boyutlu karmaşık bir A matrisi olsun. Kanıtlayın: $I + A + A^2 + \cdots$ serisi $(I + A)^{-1}$ matrisine eğer ve ancak tüm özdeğerlerin mutlak değeri 1'den küçükse yakınsar. İlave puan: Özdeğerlerin farklı olduğunu varsaymadan bunu gösterin.

4. $\mathbb{R}^+$ toplamsal grubunun 1 ve $\sqrt{2}$ tarafından üretilen altgrubunun gerçel doğrunun yoğun bir altkümesi olduğunu gösterin.