

MIT Açık Ders Malzemeleri
<http://ocw.mit.edu>

18.701 Cebir 1

2007 Güz

Bu malzemedan alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için <http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitesini ziyaret ediniz.

Problemler 5

1. Kanıtlayın: $m \times n$ boyutlu bir A matrisinin rankının 1 olması için; $X \in \mathbb{R}^m$ bir sütun vektörü ve $Y \in \mathbb{R}^n$ bir satır vektörü olmak üzere $A = XY$ şeklinde yazılabilmesi gerekli ve yeterlidir.

2. Bir $v = (a_1, \dots, a_n)$ gerçel vektörü olsun. Satırları v 'nin girdilerini mümkün tüm yollardan birbiriyle değiştirerek edilen $(n!) \times n$ boyutlu M matrisini oluşturalım. Satırlar gelişigüzel sıralanabilir. Mesela $n = 3$ için M şöyle bir 3×6 matris olurdu:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Böyle bir matrisin alabileceği tüm rankları belirleyin.

3. Boyutu d olan bir V vektör uzayında bir T doğrusal operatörü olsun. K_r ve W_r ile T^r kuvvetinin çekirdeğini ve görüntüsünü gösterelim.

(i) $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ ve $W_1 \supset W_2 \supset \dots$ olduğunu gösterin.

(ii) İzleyen şartlar r 'nin belirli bir değeri için sağlanabilir ya da sağlanmayabilir:

- (1) $K_r = K_{r+1}$,
- (2) $W_r = W_{r+1}$,
- (3) $W_r \cap K_1 = \{0\}$,
- (4) $W_1 + K_r = V$.

V 'yi sonlu boyutlu varsayarak, (1)-(4) şartları arasındaki tüm gerektirmeleri bulun. (Mesela eğer (3) doğruysa (4) de doğru mudur?)

(iii) Aynı şeyi V sonsuz boyutlu olduğunda da yapın.

4. A, B birer $m \times n$ ve $n \times m$ boyutlu matris olsun.

(i) Kanıtlayın: Eğer $\lambda \neq 0$ sayısı $m \times m$ boyutlu AB matrisinin bir özdeğeriye, $n \times n$ boyutlu BA matrisinin de bir özdeğeri. Bunun $\lambda = 0$ için daima doğru olmadığını bir örnekle gösterin.

(ii) (i)'yi kullanarak $I_m - AB$ matrisinin eğer ve ancak $I_n - BA$ matrisi tersinirse tersinir olduğunu gösterin.