18.701 Cebir 1
2007 Güz

Problemler 4

1. Aşağıdaki Laplace denklemini sağlayan iki değişkenli $f(u,v)$ fonksiyonuna *harmonik fonksiyon* denir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

Dirichlet Problemi bir R düzlem bölgesinde harmonik olup verilen sınır değerleri alan fonksiyonu bulma problemidir. Bu alıştırmada Dirichlet probleminin kesikli halini çözeceğiz.

Tanım kümesi tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ olan gerçel değerli bir f fonksiyonu verilsin. Türevin kesikli benzeri $f(n+1)-f(n)$ birinci farkıdır. Simetriyi kırmak için kesikli türev kaymış tamsayı kafesi $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ üzerinde; $f'(n+\frac{1}{2}) = f(n+1)-f(n)$ şeklinde tanımlanır. İkinci kesikli türev tekrar $\mathbb{Z}$ üzerine döner:

$$f''(n) = f'(n+\frac{1}{2}) - f'(n-\frac{1}{2}) = f(n+1) - 2f(n) + f(n-1).$$

Düzlemde tamsayı koordinatlı kafes noktaları üzerinde bir $f(u,v)$ fonksiyonu tanımlansın. İkinci kesikli türev fomülünü kullanarak Laplace denkleminin kesikli benzeri

$$(*) \qquad f(u+1,v) + f(u-1,v) + f(u,v+1) + f(u,v-1) - 4f(u,v) = 0$$

bulunur. Yani f'nin her kafes noktasındaki değeri dört komşu noktada aldığı değerin ortalamasına eşitse f harmonik olur.

Düzlemde sonlu sayıda noktadan ibaret olan kümeye *kesikli bölge* denir. *Sınırı* ∂R; R içinde olmayıp R'nin bir noktasına birim mesafede olan noktalar kümesi olarak tanımlanır. R'ye $\overline{R} = R \cup \partial R$ bölgesinin *dahili* denir. Sınır ∂R üzerinde bir b fonksiyonu verilsin. Dirichlet problemi $\overline{R}$ üzerinde tanımlı, sınırda b ile çakışan, ve dahildeki her nokta için (*) denklemini sağlayan fonksiyonu bulma problemidir. Bu problem bizi bir doğrusal denklem sistemine götürür:

$$LX = B.$$

Bu sistemi kurmak için b fonksiyonunun (u,v) sınır noktasında aldığı değeri b_{uv} ile gösterelim. R'nin noktalarını gelişigüzel sıralayalım ve x_{uv} bilinmeyenlerini bir sütun vektör haline getirelim. Katsayı matrisi L, sınırda komşusu olmayan noktalar için (*) doğrusal bağıntılarını ifade eder, sınırda komşusu olan noktalar içinse (*) bağıntısı içinde gereken yerlerde sınır değerler olur. Bu terimler toplanıp eşitliğin öbür tarafına atılarak B vektörü oluşturulur.

(i) $R = \{(0,0), \pm(0,1), \pm(1,0)\}$ olsun. Bu kümenin sekiz sınır noktası vardır. Bu durumda doğrusal denklem sistemini yazarak Dirichlet Problemini ∂R üzerinde $v \leq 0$ için $b_{uv} = 0$ ve $v > 0$ için $b_{uv} = 1$ b ile tanımlanan sınır değer fonksiyonu için çözün.

(ii) *maksimum ilkesi* harmonik bir fonksiyonun maksimum değerini sınırda aldığını söyler. Kesikli harmonik fonksiyonlar için Maksimum ilkesini kanıtlayın.

(iii) Maksimum ilkesini kullanarak Dirichlet Probleminin her R bölgesi ve b sınır fonksiyonu için yegane bir çözümü olduğunu kanıtlayın.

2. F bir cisim olsun. $(v_1, \ldots, v_n)$ sütun vektörlerinin eğer ve ancak şu şartlar sağlanırsa F^n için bir taban oluşturduğunu gösterin:

v_1 sıfır değildir,
v_2 vektörü $\{v_1\}$ tarafından gerilen uzayda değildir,
v_3 vektörü $\{v_1, v_2\}$ tarafından gerilen uzayda değildir,
$\ldots$
v_n vektörü $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ tarafından gerilen uzayda değildir.

3. $\mathbb{F}_p$ ile mod p'deki tamsayılar cismini gösterelim.

(i) $GL_2(\mathbb{F}_p)$ ve $SL_2(\mathbb{F}_p)$ gruplarının mertebesini belirleyin.

(ii) $SL_2(\mathbb{F}_3)$ grubunun S_4 simetrik grubuna izomorf olduğunu gösterin.

4. Bu problemde katsayılar gerçel sayılardır.

(i) $x(t) = t^2 - 1$ ve $y(t) = t^3 - t$ patikalarını çizin.

(ii) $x(t)$ e $y(t)$ arasında polinom bir bağıntı bulun: yani öyle bir $f(x, y)$ polinomu bulun ki $f(x(t), y(t))$ heryerde sıfır olsun.