

MIT Açık Ders Malzemeleri
<http://ocw.mit.edu>

18.701 Cebir 1

2007 Güz

Bu malzemedan alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için <http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitesini ziyaret ediniz.

Problemler 10

1. $V = \mathbb{R}^3$ uzayının iki-boyutlu bir W altuzayı olsun ve V 'den W 'ye ortogonal izdüşümü π ile gösterelim. $\pi(e_i)$ vektörünün W için seçilen bir ortonormal tabanda koordinat vektörü $(a_i, b_i)^t$ olsun. O halde (a_1, a_2, a_3) ve (b_1, b_2, b_3) vektörleri ortogonal birim vektörlerdir, ispatlayın.

2. Kanıtlayın: Gerçek ve $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin $V = \mathbb{R}^n$ uzayından W altuzayına (V üzerindeki standart forma göre) bir ortogonal izdüşüm tanımlaması için; sütun vektörlerinin W altuzayını girmesi ve $A = A^t = A^2$ olması gerekir ve yeter.

3. $V = \mathbb{R}^n$ uzayında birim uzunlukta bir w vektörü olsun. W ile w 'nin gerdiği uzayı ve W^\perp ile W 'nin ortogonal uzayını gösterelim.

(i) $P - 2ww^t$ matrisi ortogondur, ispatlayın.

(ii) Katlayın: P ile çarpma W^\perp boyunca yansımadır, yani $v \in V$ vektörü $v = cw + u$ ($u \in W^\perp$) şeklinde yazılırsa $Pv = -cv + u$ olur.

(iii) $a, b \in V$ iki birim vektör olsun. Öyle bir w bulun ki, yukarıdaki P matrisi için $Pa = b$ sağlansın.

4. Sylvester Kanunu'na göre, her 2×2 gerçek simetrik matris altı standart matristen birine eşleniktir. Bunları sıralayın. GL_2 genel doğrusal grubunun matrisler üzerindeki $P \rightarrow PaP^t$ ile tanımlanan etkisini ele alırsak, Sylvester kanunu simetrik matrislerin altı yörüngesi olduğunu söylemektedir. (x, y, z) noktasını $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ matrisine göndererek, simetrik matrisleri \mathbb{R}^3 'ün noktaları gibi düşünebiliriz. \mathbb{R}^3 uzayının yörüngelere ayrışımını açıkça belirtin ve bu yörüngelerin temiz bir resmini verin.

Not. Yörüngeler x, y, z arasında cebirsel bağıntılarla tasvir edilebilir. Esas problem bu cebirsel bağıntıların geometrik anlamını gözde canlandırmaktır. \mathbb{R}^3 'deki standart koordinat sistemi kolay yorumlanacak bir şekil vermez. Daha iyi bir görüş için bakış açımızı değiştirmek isteyebilirsiniz.

5. \mathbb{R}^3 'de bir v vektörü sabitleyelim ve \times ile vektör çarpımını gösterelim. T doğrusal operatörü $T(x) = (x \times v) \times v$ ile tanımlansın.

(i) T operatörü simetriktir, gösterin. Skaler üçlü çarpımın genel özelliklerini kullanmaya izin var ancak matrisini kullanmaya izin yok.

(ii) Matrisi hesaplayın.

6. Karmaşık düzlemdeki birim çember üzerindeki türevlenir fonksiyonlar uzayı V olsun ve $f, g \in V$ için şu işlem tanımlansın:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta.$$

(i) Bunun hermiyen ve pozitif belirli bir form olduğunu gösterin.

(ii) Derecesi $\leq n$ olan f polinomları için $f(e^{i\theta})$ fonksiyonlarından oluşan $W \subset V$ altuzayı için bir ortonormal taban bulun.

(iii) $T = i \frac{d}{d\theta}$ operatörü hermiyendir, gösterin ve W üzerindeki özdeğerlerini bulun.