

MIT Açık Ders Malzemeleri
<http://ocw.mit.edu>

18.701 Cebir 1

2007 Güz

Bu malzemedен alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için <http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitesini ziyaret ediniz.

Problemler 1

Genel bir kural olarak, buradaki tüm iddiaları ispatlamanız beklenmektedir.

1. Tamsayı girdili bir A kare matrisi verilsin. Kanıtlayın: A^{-1} matrisi eğer ve ancak $\det A = \pm 1$ ise tamsayı girdilidir.

2. A bir $m \times n$ ve B bir $n \times m$ matris olsun. Kanıtlayın: $I_m - AB$ matrisi eğer ve ancak $I_n - BA$ matrisi tersinirse tersinirdir.

Not: Şu an elinizde mevcut tek yaklaşım terslerden birini diğeri cinsinden ifade etmek olsa gerek. Deneme-yanılma yöntemi için $(1-x)^{-1}$ ifadesinin kuvvet serisine yerleştirin. Bir seri yakınsamadıkça bu anlamsızdır, seri de yakınsamak zorunda değildir. Ancak bir formülü tahmin etmek için her yönteme izin verilir, tabii sonradan tahmininizi kanıtlamanız kaydıyla.

3. Kanıtlayın: Tüm birim determinantlı 2×2 tamsayı matrislerin grubu olan $SL_2(\mathbb{Z})$ grubu şu matrisler tarafından üretilir:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bunların ürettiği grubun E , E' , E^{-1} ve E'^{-1} matrislerinin çarpımı olarak yazılan elemanlardan oluştuğunu unutmayın.

4. Üçlü çevrimlerin A_n alması grubunu ürettiğini ispatlayın.

5. *Bir mantık alıştırması:* n bilinmeyenli ve m doğrusal denklemlerle genel $AX = B$ sistemini ele alalım (n ve m eşit olmak zorunda değil). Katsayı matrisi A 'nın bir soldan tersi, yani $LA = I_n$ şeklinde bir L matrisi var olabilir. Böyleyse, denklemi şöyle çözmeye yeltenebiliriz: $AX = B$, $LAX = LB$, $X = LB$. Ancak çalışmamızı kontrol etmek için çözümü yerine koyduğumuzda bir sorunla karşılaşırız: Eğer $X = LB$ ise $AX = ALB$ olur. L 'nin sağdan ters olması gerekmiş gibi görünüyor, ki bu bize verilmemişti.

(a) Birkaç örnek üzerinde çalışarak burada bir sorun olduğunun farkına varın.

(b) Soldan tersin varlığının *herhangi* bir anlamı yok mu? Sağdan ters konusunda ne dersiniz?

Not. Bu mefhumun doğrusal denklemlerle pek bir ilgisi yoktur. Eğer $f : X \rightarrow Y$ iki sonlu küme arasında bir fonksiyonsa ve $b \in Y$ ise, $f(x) = b$ denklemini çözmeye yeltenebiliriz. Eğer f bir soldan tersine sahipse, yani $\ell \circ f$ fonksiyonu X üzerindeki birim fonksiyon olacak şekilde bir $\ell : Y \rightarrow X$ varsa, ℓ eşitliğin her iki tarafına da uygulanarak çözüme denemesi çoğunlukla başarısızlıkla sonuçlanacaktır. Cevabınız bunu da açıklamalı.

Teşhis Problemi

Atıflar için bkz. Artin, M. Algebra. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

6. Bölüm 2, Problem 2.11. Bu problem ispat yazma eğitiminizi ölçme amacıyla hazırlanmıştır. Kendi başınıza çalışıp çözümü en mükemmel haliyle yazmaya çalışın. Çözümünüzü okuyacağım ancak notunuza katkısı olmayacak.

Farklı bir sayfaya isminizle yazıp problemlerin çözümünüyle birlikte teslim edin.