Ders 25

Metindeki ilgili bölümler §3.6, 3.7

Açısal momentum işlemcilerinin konum temsili

Konum işlemcilerinin konum dalga fonksiyonları üzerine çarpım yoluyla etkidiğini ve momentum işlemcilerinin türev alarak etkidiğini gördük. Bu iki sonucu birleştirebilir ve küresel kutupsal koordinatları (r, θ, ϕ) kullanarak açısal momentum işlemcileri için kullanışlı bir konum dalga fonksiyonu temsili elde edebiliriz. Elimizde

$$L_x\psi(r, \theta, \phi) = \frac{\hbar}{i}(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi)\psi(r, \theta, \phi)$$
$$L_y\psi(r, \theta, \phi) = \frac{\hbar}{i}(-\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi)\psi(r, \theta, \phi)$$
$$L_z\psi(r, \theta, \phi) = \frac{\hbar}{i}\partial_\phi\psi(r, \theta, \phi)$$

var. L_z'nin özellikle kolay olduğunu görebilirsiniz – bu açıkça ϕ'de "ötelemeler" üretir ki, bunlar elbette z ekseni etrafında dönüşlerdir. $\vec{L}$'nin diğer iki bileşeni de kendi ilgili eksenleri etrafında dönüşler üretirler. Küresel kutupsal koordinatlarda z bileşeninin özel bir yeri olduğu için bunlar öyle basit formlar almazlar.

Bu sonuçları birleştirerek, ayrıca,

$$L^2\psi(r, \theta, \phi) = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)\right)\psi(r, \theta, \phi)$$

elde ederiz. Bu son sonucun, $-\hbar^2 r^2$ faktörü farkıyla Laplace işlemcisinin açısal kısmı olduğunu fark etmiş olabilirsiniz. Bu sonuç

$$L^2 = r^2P^2 - (\vec{X}\cdot\vec{P})^2 + i\hbar\vec{X}\cdot\vec{P}$$

özelliğinden gelir (alıştırma) burada $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, böylece,

$$P^2\psi(r, \theta, \phi) = -\hbar^2\nabla^2\psi(r, \theta, \phi) = -\hbar^2(\frac{1}{\hbar^2 r^2}L^2 + \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r)\psi(r, \theta, \phi).$$

Bundan dolayı, kinetik enerjinin radyal ve açısal kısımlara bilindik ayrışımını işlemci formunda elde ediyoruz.

Orbital açısal momentum özdeğerleri ve özvektörleri; küresel harmonikler

Orbital açısal momentum özvektörlerinin fiziksel içeriğinin olduğunu görmenin iyi yollarından biri bu durumlarda konum olasılık dağılımlarını çalışmaktır. Bu nedenle, orbital açısal momentum özvektörlerine karşılık gelen

$$\psi_{lm} = \langle\vec{x}|l, m\rangle$$

konum dalga fonksiyonlarını düşünüyoruz. Bunlar L^2 ve L_z'nin eşzamanlı özfonksiyonlarıdır, dolayısıyla,

$$L_z\psi_{lm_l} = m_l\hbar\psi_{lm_l}, \qquad L^2\psi_{lm_l} = l(l+1)\hbar^2\psi_{lm_l}$$

sağlarlar burada – genel itibariyle –

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$$

ve

$$m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l.$$

Açısal momentum özfonksiyonlarının her zaman r yarıçapına bağlı bir fonksiyonu çarpan olarak içereceğini dikkate alıyoruz. Bu, açısal momentum diferansiyel işlemcilerin yalnızca açısal yönlerde türev almasından dolayıdır. Bunun fiziksel olarak anlamı, belirli bir açısal momentumu olan durumların her zaman dejenereliğe sahip olacağıdır. Bu sizi şaşırtmamalı : bir parçacığın durumunun sadece açısal momentumunu belirtmenin, parçacığın durumunu tamamen belirlemesi beklenmez.*

Şimdi, buçuklu sayı değerlerinin orbital açısal momentum için gerçekleşmeyeceğini öne sürüyoruz. İlk olarak, $L_z = -i\hbar\partial_\phi$ olduğundan L_z'nin özfonksiyonlarını küresel kutupsal koordinatlarda bulmanın çok kolay olduğunu not ederiz. Açıkça,

$$\psi_{lm_l} = f_{lm_l}(r,\theta)e^{im_l\phi}.$$

Buradan m_l'in yalnızca bir tamsayı olabileceğini hemen görüyoruz – yoksa ψ_{nlm} sürekli bir fonksiyon olmaz. Şimdi, süreksiz dalga fonksiyonları doğası gereği kötü değildir. Gerçekte Hilbert uzayında bir sürü süreksiz fonksiyon vardır. Fakat bu fonksiyonlar türevlenebilir değildir ve bu nedenle momentum ve açısal momentumun tanım kümesinde yer almazlar. Bu bir çelişkidir, çünkü, şüphesiz ki, tanımı gereği işlemcilerin tanım kümesinde olan açısal momentum özfonksiyonları kurmaya çalışıyoruz. Bundan dolayı, orbital açısal momentum için sadece (en fazla)

$$l = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{and} \quad m_l = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$$

elde edebileceğimize hükmedebiliriz. Göreceğimiz gibi, haikaten bu belirtilen değerlerin hepsi de ortaya çıkar. (Bu arada, ödevinizde, bu sonuç için alternatif bir tartışma veren bir problem bulacaksınız.)

L_z denklemini çözdükten sonra şimdi L^2 denklemini çözmeliyiz, ki bu $f_{lm_l}(r,\theta)$ için bir sıradan diferansiyel denklemdir :

$$\frac{1}{\hbar^2}L^2 f_{lm_l} = \left(\frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)\right) f_{l,m_l} = l(l+1)f_{lm_l}.$$

*Örneğin, bir parçacığın açısal momentumunun yok olduğu klasik hareket düşünün. Bu harekette konum ve momentum vektörleri paraleldir, aksi halde bunlar rastgele olur.

Bu denklemin çözümleri $P_{l,m_l}(\cos\theta)$ asosiye Legendre polinomlarıdır ve böylelikle açısal momentum özfonksiyonları

$$\psi_{l,m_l}(r,\theta,\phi) = \bar{f}_{l,m_l}(r) Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$$

formundadır, burada $Y_{l,m_l}(\theta,\phi)$ *küresel harmonikler*dir ve $\tilde{f}_{l,m_l}(r)$ tamamen açısal diferansiyel denklemlerin çözümlerinde "integrasyon sabitleri"dir. Küresel harmoniklere ait ayrıntılı formüller için ders kitabınıza bakın. Bütün negatif olmayan tam sayıların l için mümkün olduğuna dikat edin. Daha önce tartışıldığı gibi, $\tilde{f}_{lm_l}$ açısal momentum özdeğer problemi ile belirlenmez. Tipik olarak, bu fonksiyonlar dalga fonksiyonunun L^2 ve L_z ile sıradeğişmeli olan bir başka gözlenebilirin, örneğin merkezcil kuvvet probleminde enerjinin, de bir özfonksiyonu olması koşuluyla belirlenir. Her halükarda,

$$\int_0^\infty dr r^2 |f_{l,m_l}|^2 = 1$$

olduğunu kabul ederiz. Bu yolla küresel harmoniklerin uzlaşımsal normalizasyonu :

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y^*_{l',m'_l}(\theta,\phi) Y^*_{l,m_l}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{m_l m'_l},$$

ile

$$\langle l', m'_l | l, m_l\rangle = \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \psi^*_{l',m'_l}(r,\theta,\phi)\psi_{l,m_l}(r,\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{m_l,m'_l}$$

elde ederiz.

Belirli açısal momentumu olan bir $|l,m_l\rangle$ durumu için olasılık dağılımının açısal bağımlılığının tamamen küresel harmoniklerle belirlendiğini görüyoruz. Olasılık dağılımının radyal bağımlılığı, bu durum üzerine başka koşullar konulmadıkça, açısal momentumun değeri tarafından belirlenmez.

Açısal momentum toplamı : İki spin 1/2 sistemi

Şimdi, açısal momentum teorisinin iki (veya daha fazla) açısal momentumun kombinasyonunu içeren oldukça önemli ve çapraşık bir bölümüne bakacağız. Başlıca, iki ayırdedilebilir spin 1/2 parçacık içeren bir sistemin kuantum modelini oluşturma problemine (spin dışındaki hiçbir serbestlik derecesini dikkate almayarak) odaklanacağız. Tekrar edecek olursak, fikir basitçe, bir spin 1/2 sistemine ait mevcut modelden iki tanesini birleştirmektir. Bize gereken teknoloji direkt çarpım inşasının tartışmasında zaten tanıtılmıştı. Bu inşayı, iki spin 1/2 açısal momentumunun birleşmesi – veya "toplanması" problemi bağlamında tekrar gözden geçirme fırsatı bulacağız.

İki spin 1/2 parçacıklı bir sistem, örneğin bir elektron ve bir pozitron, için seçilen bir eksen, mesela z ekseni, yönünde herbir parçacığın spin bileşenini ölçmeyi hayal edebiliriz. Belli ki 4 olası sonuç vardır (alıştırma). Bu ölçümleri yaptıktan sonra, spin değerlerinin kesinlik derecesinde bilindiği bu durumları

$$|S_z, +\rangle \otimes |S_z, +\rangle, |S_z, +\rangle \otimes |S_z, -\rangle, |S_z, -\rangle \otimes |S_z, +\rangle, |S_z, -\rangle \otimes |S_z, -\rangle,$$

ile gösterebiliriz. Burada, çiftin ilk faktörü herzaman "1. parçacık"a işaret eder ve ikinci faktör de "2. parçacık"a aittir. Bu vektörleri, 2 spin 1/2 parçacığın durumlarının direkt çarpım Hilbert uzayının ortonormal bir bazı olarak görürüz. Dolayısıyla, bu 4 baz vektörünün formal doğrusal kombinasyonunun 4-d Hilbert uzayını göz önüne alıyoruz. Rastgele bir $|\psi\rangle$ vektörü

$$|\psi\rangle = a_{++}|S_z, +\rangle \otimes |S_z, +\rangle + a_{+-}|S_z, +\rangle \otimes |S_z, -\rangle + a_{-+}|S_z, -\rangle \otimes |S_z, +\rangle + a_{--}|S_z, -\rangle \otimes |S_z, -\rangle$$

ile verilir. Burada skaler çarpım bu çiftin tümüne verilmiştir, fakat tanım gereği çiftteki herhangi bir faktöre de tahsis edilebilir. Eğer isterseniz $a_{\pm\pm}$ skalerlerini 4 satırlı bir sütun vektörü oluşturuyor şeklinde görebilirsiniz; bu skalerlerin karesi herbir parçacık için S_z ölçümüne ait sonucun çeşitli olasılıklarını verir. Başka deneysel düzeneklere uyan başka bazlar da olasıdır, örneğin 1. parçacık için S_x ve 2. parçacık için S_y.