Ders 24

Metindeki ilgili bölümler §3.5, 3.6

Açısal momentum özdeğerleri ve özvektörleri (devam)

Bundan sonra, J^2'nin özdeğerlerinin negatif olmadığı ve J_z'nin özdeğerlerinin büyüklüğü ile sınırlı olduğunu gösteriyoruz. Bunu görmenin bir yolu

$$J^2 - J_z^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) = \frac{1}{2}(J_-^\dagger J_- + J_+^\dagger J_+)$$

bağıntısını çalışmaktan geçer. Şimdi, herhangi bir A işlemcisi ve $|\psi\rangle$ vektörü için

$$\langle\psi|A^\dagger A|\psi\rangle \geq 0$$

elde ederiz (alıştırma), bundan dolayı herhangi bir $|\psi\rangle$ vektörü için (açısal momentum işlemcilerinin karelerinin tanım kümesinde) (alıştırma)

$$\langle\psi|J^2 - J_z^2|\psi\rangle \geq 0.$$

$|a, b\rangle$ özvektörlerinin "genelleştirilmiş" tipte olmadığını, yani boylandırılabilir olduğunu kabul ederek,

$$0 \leq \langle a, b|J^2 - J_z^2|a, b\rangle = a - b^2,$$

elde ederiz ve böylelikle,

$$a \geq 0, \qquad -\sqrt{a} \leq b \leq \sqrt{a}.$$

Merdiven işlemcileri özvektörün b değerini, a'yı değiştirmeden, yükseltir/alçaltır. Bundan dolayı, b için bir maksimum ve minimum değer olmazsa, öyle ki J_+ ve J_-'nin belirtilen sırada uygulanması sıfır vektörü verecek, bu işlemcilerin tekrarlı uygulanmaları ile yukarıdaki eşitsizliği ihlal edebiliriz. Üstelik, eğer b'nin minimum (maksimum) değerli bir özvektöründen başlarsak, $J_+(J_-)$'yi ardı ardına uygulayarak maksimum (minimum) değere ulaşmamız gerekir. Ders kitabınızda gösterildiği gibi, bu zorunluluklar aşağıdaki sonuçlara yol açar. a özdeğerleri ancak

$$a = j(j+1)\hbar^2$$

şeklinde olabilir, burada $j \geq 0$ sadece negatif olmayan bir tamsayı veya buçuklu sayı olabilir :

$$j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$$

Verilen bir j değeri ile bir özvektör için, b özdeğerleri

$$b = m\hbar$$

ile verilir burada

$$m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$$

Eğer j bir tamsayı ise m'nin de öyle olduğuna, eğer j buçuklu sayı ise m'nin de öyle olduğuna dikkat edin. Ayrıca, seçilen bir j değeri için $2j+1$ tane olası m değerinin olduğunu not edin. Genel temsil eğilimi, açısal momentum özvektörlerini, j ve m'nin yukarıdaki kısıtlamalara uyduğu $|j, m\rangle$ ile belirtmektir

Az önceki çıkarımlar açısal momentumun kendine eşlenikliği ve sıradeğişimi bağıntılarının spektrumları hakkında nekadar çok bilgi verdiğini gösteriyor. Bunların zorunlu koşullar olduğunu not ediyoruz. Örneğin açısal momentumun büyüklüğünün bir tamsayı veya buçuklu sayı ile belirlenmesi gerekir ama bu olanakların hepsinin gerçekleşeceği anlamına gelmez. Göreceğimiz gibi, orbital açısal momentum için sadece tamsayı olasılığından yararlanılır. Spin 1/2 sistemi için yalnızca $j = 1/2$ değerinden faydalanılır. Şimdi, bunu biraz daha detaylıca tartışacağız.

Genel olarak spin sistemleri

Spin 1/2 gözlenebilirlerinin, açısal momentum işlemcileri olarak, az önce türettiğimiz genel sonuçlara uyan özvektörlere/özdeğerlere sahip olması gerektiğini not edelim. Gerçekten de, $j = 1/2$ ile spin işlemcilerinin spektrumuna ait standart sonuçları yeniden ürettiğimizi kolayca görebilirsiniz. Örneğin,

$$J^2 \leftrightarrow S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 I$$

elde ederiz ki, bu

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

özdeğerlerine sahiptir. $j = 1/2$ verildiğinde

$$m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

elde ederiz ki, $J_z \leftrightarrow S_z$ için özdeğerler olması gerektiği gibi $\pm\hbar$'dir.

"Spin 1/2"deki "1/2", bu fiziksel sistemin ilgili bütün durumları için $j = 1/2$ olması gerçeğinden gelir. Bunu j'nin başka değerlerine de genelleyebiliriz. Eğer hepsi de S^2 için aynı özdeğere, yani tümü $j = s$ için aynı değere, sahip olan durumların Hilbert uzayında etkiyen açısal momentum işlemcileri alırsa, spini s olan bir parçacıktan veya sistemden bahsederiz. Spin-s'den başka hiçbir serbestlik derecesi olmayan bir sistem için durumların Hilbert uzayı $2s+1$ boyutludur (alıştırma) ve spinin büyüklüğünün karesini temsil eden işlemci

$$S^2 = s(s+1)\hbar^2 I$$

ile verilir (alıştırma).

Orbital açısal momentum

Maddenin “parçacık” tasvirini kullandığımız zaman açısal momentumun doğada iki tipte ortaya çıktığı görülür. İlk olarak, temel bir parçacık tarafından taşınan içsel “spin” açısal momentum vardır. Bir parçacığın spini her zaman için sabittir (spin durumu olmasa bile) ve parçacığı parçacık yapan esas niteliğin bir parçasıdır. İkinci olarak, parçacığın uzaydaki hareketinden ortaya çıkan “orbital” açısal momentum vardır. Kuantum alan teorisi tarafından ortaya konan maddenin ve onun etkileşimlerinin büyük ihtimalle daha temel tasviri kullanıldığında, bu her iki tip açısal momentum bir dereceye kadar birleşiktir.

Bir parçacığın orbital açısal momentumu

$$\vec{L} = \vec{X} \times \vec{P}$$

işlemcisi ile temsil edilir, burada $\vec{X}$ sabit bir orijine göre konum işlemcisidir. Vektör çarpımı sadece sıradeğişmeli işlemcileri işe dahil ettiği için $\vec{X}$ ve $\vec{P}$ işlemcilerinin sıralamasının anlamının açık olduğunu not edelim. Örneğin,

$$L_z = XP_y - YP_x$$

$\vec{L}$ için yukarıdaki formül klasik mekanikten tanıdık olmasının yanında açısal momentum sıradeğişimi bağıntıları kullanılarak doğrulanabilir. Örneğin, dosdoğru bir hesapla

$$[L_x, L_y] = [YP_z, ZP_y, ZP_x - XP_z] = i\hbar(XP_y - YP_x) = i\hbar L_z$$

olduğunu kontrol edebilirsiniz. Diğer açısal momentum sıradeğişimi bağıntıları benzer şekilde takip eder.

Orbital açısal momentum ve dönüşler

Orbital açısal momentumun bu biçiminin doğruluğunu daha fazla ortaya koymak için, onun rolünü sonsuz küçük dönüşlerin üreteci olarak çalışabiliriz. z ekseni etrafında sonsuz küçük bir dönüş göz önüne alın. Öyle olduğu varsayılan üreteç

$$L_z = XP_y - YP_x.$$

L_z'nin durumlar üzerindeki etkisini, konum bazı üzerindeki etkisini hesaplayarak çalışabiliriz,

$$|\vec{x}\rangle = |x, y, z\rangle, \qquad \vec{R}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$$

Bir ϵ açısıyla sonsuz küçük bir dönüş

$$D(\epsilon) = I - \frac{i}{\hbar}\epsilon L_z + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

ile verilir, böylece ϵ'da birinci dereceye kadar,

$$\begin{aligned}D(\epsilon)|x,y,z\rangle &= [I-\frac{i}{\hbar}\epsilon(xP_y-yP_x)]|x,y,z\rangle+\mathcal{O}(\epsilon^2)\\ &= |x-\epsilon y, y+\epsilon x, z\rangle+\mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Burada, momentumun ötelemeler ürettiği gerçeğini kullandık. Şimdi şu geometrik gerçeği hatırlayın : bir $\hat{n}$ ekseni etrafında ϵ açısıyla sonsuz küçük bir dönüş altında konum vektörü (aslında, herhangi bir vektör)

$$\vec{x}\to\vec{x}+\epsilon\hat{n}\times\vec{x}+\mathcal{O}(\epsilon^2)$$

biçiminde dönüşür. $\hat{n}$'yi z ekseni yönünde seçerek bu formülü konum özvektörünün L_z tarafından üretilen sonsuz küçük bir dönüşümü altında değişimi ile karşılaştırabiliriz. Konum özvektörünün özdeğerinin olması gerektiği gibi döndüğünü (en azından sonsuz küçük olarak) görürüz.

z ekseni etrafında sonlu (yani sonsuz küçük olmayan) bir dönüş altında

$$\begin{aligned}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta L_z}|x,y,z\rangle &= |x\cos\theta-y\sin\theta, y\cos\theta+x\sin\theta, z\rangle\\ &= |R(\hat{k},\theta)\cdot\vec{x}\rangle\end{aligned}$$

olduğunu görmek zor değildir. Bunu, örneğin, sonsuz küçük dönüşümleri tekrarlayarak ispat edebilirsiniz. z ekseni rastgele seçildiğinden, biz aslında

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\vec{x}\rangle=|R(\hat{n},\theta)\cdot\vec{x}\rangle$$

olduğunu ispatladık (alıştırma). Bu

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}\vec{X}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}=R(\hat{n},\theta)\cdot\vec{X}$$

bağıntısına işaret eder ki, konum bazı üzerinde hesaplayarak kontrol edilebilir. Bundan dolayı,

$$X(e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\vec{x}\rangle)=R(\hat{n},\theta)\cdot\vec{x}(e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\vec{x}\rangle)$$

elde ederiz (alıştırma), öyle ki, bu dönüş işlemcisi Hilbert uzayında konumun özvektörlerini döndürülmüş konumun özvektörlerine götürür :

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\vec{x}\rangle=|R(\hat{n},\theta)\cdot\vec{x}\rangle$$

Bu sonuçtan dolayı düzgün biçimde dönen konum dalga fonksiyonları elde ederiz (alıştırma) :

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\psi(\vec{x})=\langle\vec{x}|e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\psi\rangle=\psi(R^{-1}(\hat{n},\theta)\cdot\vec{x})$$

Buna özdeş bir sonuç kümesi momentum işlemcileri, onların özvektörleri ve momentum dalga fonksiyonları için elde edilebilir. Momentum *vektör*ü dönüşler altında konum vektörü ile aynı şekilde davranacağı için bu, tatmin edici bir sonuç kümesidir. Özellikle

$$\begin{aligned}D(\hat{n},\theta)|\vec{p}\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}|\vec{p}\rangle&=|R(\hat{n},\theta)\vec{p}\rangle\\ e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}\vec{P}e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{L}}&=R(\hat{n},\theta)\vec{P}\end{aligned}$$

elde ederiz.