Ders 23

Metindeki ilgili bölümler §3.2, 3.5

Bir dönme hareketi olarak spin presesyonu

Dönme hareketlerindeki yeni sonuçlarımızın ışığında spin presesyonu dinamik sürecine tekrar gelmek aydınlatıcıdır. Manyetik momenti $\vec{\mu}$ olan bir spin sisteminin, düzgün bir $\vec{B}$ manyetik alanına yerleştirildiğinde

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad \text{burada} \quad \vec{\mu} = \mu\vec{S}$$

Hamilton işlemcisi ile tasvir edileceğini hatırlayacaksınız. Spin gözlenebilirlerinin davranışına, $\vec{B}$ etrafında presesyon, yani $\vec{B}$ yönündeki bir eksen etrafında (zaman içinde) devinim gösteren sürekli bir dönüş, olarak bakılabileceğini hatırlayacaksınız. Bu sonucu hemen görebiliriz. $\hat{n}$, $\vec{B}$ yönünde bir birim vektör olsun, dolayısıyla

$$H = -\mu B\hat{n} \cdot \mathbf{S}.$$

Bu, zamanla gelişim işlemcisinin

$$U(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\mu B\hat{n}\cdot\vec{S}}$$

olduğu anlamına gelir. Bu işlemci $\hat{n}$ etrafında $\mu\beta(t - t_0)$'lık bir "açı" ile dönüşü temsil eder ki, bu daha önce dinamik için elde ettiğimiz sonucun aynısıdır.

Fiziksel gözlenebilirleri μB frekansıyla presesyon yaparken, durum vektörünün kendisinin bu frekansın yarısıyla presesyon yaptığına, yani durum vektörünün kendi başlangıç değerine gelmesi için 4π dönüş yapması gerektiğine dikkat edin. Deneysel olarak frekanstaki bu farkları, biri serbest hareket eden diğeri manyetik alanlı bir bölgeden geçen bir çift spin 1/2 sistemi sayesinde "görmek" (böylelikle kullandığımız projektif temsili onaylamak) mümkündür. İkinci spin manyetik alanda geçirdiği süreye göre presesyon yapacaktır. Bu iki parçacık bir girişim deseni oluşturmak üzere biraraya getirilebilir. Girişim deseni bu parçacıkların birbirlerine göre olan fazlarına bağlıdır. Eğer manyetik alan bölgesi tam istendiği gibi ayarlanabilirse ikinci parçacığın durum vektörünün manyetik alan bölgesinden çıkarken eksi işareti almasını sağlayabilirsiniz. Göreceğiniz girişim deseni bu gerçeği onaylayacaktır. Ayrıntılar için ders kitabınıza bakın.

Genel itibarıyle açısal momentum

Yalnızca, açısal momentum sıradeğişimi bağıntılarını sağlayan 3 kendine eşlenik işlemci ile temsil edildiğini bilerek herhangi bir sistemin $\vec{J}$ açısal momentumu hakkında oldukça fazla bilgi çıkarabiliriz. Başlamak için, $\vec{J}$'nin 3 bileşeninin uyuşumlu olmadığı, dolayısıyla, genel olarak, birden fazla bileşeninin kesinlik derecesinde belirlenemeyeceği açıktır. Gerçekten de, $\vec{J}$'nin 2 veya daha fazla bileşeninin kesinlikle bilindiği tek durum, tüm bileşenleri sıfır özdeğerli olan bir özvektördür, yani açısal momentumun yok olduğu bir durumdur. Bunu görmek için, $|\alpha\rangle$'nın J_x ve J_y'nin bir özvektörü olduğunu kabul edin, sonrasında

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

bağıntısından $|\alpha\rangle$'nın J_z'nin 0 özdeğerli bir özvektörü olduğunu görmek kolaydır. Aynı tartışmanın, şimdi, her üç bileşen için $|\alpha\rangle$'nın sıfır özdeğere sahip olduğunu göstermek için kullanılabileceğini kolayca görebilirsiniz. Bundan dolayı, sistemde en ufak herhangi bir momentum bulunduğunda, herhangi bir durumda en fazla bir bileşeni kesinlik derecesinde bilinebilir. $\vec{J}$'nin bir bileşeni için belirli bir değeri olan durumları düşündüğümüzde, bu bileşeni genellikle yaygın kabule göre J_z olarak adlandırırız. Fakat z ekseninin herhangi bir özelliğinin olmadığını farketmek önemlidir; $\vec{J}$'nin herhangi bir bileşeni için özvektörler bulunabilir (spin 1/2 ile kıyaslayın).

Bundan sonra, açısal momentumun büyüklüğünün (karesinin)

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

herhangi bir J_i bileşeni ile uyuşumlu Hermitesel bir işlemci olduğunu gözlüyoruz. Bunu görmek çok basit bir hesap gerektirir :

$$[J^2, J_k] = \sum_{\ell} (J_\ell [J_\ell, J_k] + [J_\ell, J_k] J_\ell) = i\hbar \sum_{\ell,m} \epsilon_{\ell k m} (J_\ell J_m + J_m J_\ell) = 0$$

burada son eşitlik $\epsilon_{\ell k m}$'in anti-simetrikliğinden geliyor. * J^2'nin kendine eşlenik olduğunu kabul edeceğiz. Sonuç olarak, J^2 ve $\vec{J}$'nin herhangi bir bileşeninin (genellikle J_z olarak gösterilir) eşzamanlı özvektörlerinin ortonormal bir bazı vardır. Fiziksel olarak, bu, açısal momentumun 3 bileşeninin birbiriyle uyuşumlu olmamasına karşın açısal momentumun büyüklüğünün ve açısal momentumun bir bileşeninin kesinlik derecesinde bilindiği bir durumlar kümesinin var olduğu anlamına gelir.

Açısal momentum özdeğerleri ve özvektörleri

Tabii ki, bir işlemci olarak temsil edilen bir gözlenebilir verildiğinde, en baskılayıcı iş bu işlemcinin tayfsal özelliklerini anlamaktır, çünkü gözlenebilirin ölçümünün olası çıktılarını bunun spektrumu belirler ve (genellenmiş) özvektörler istenen bir durumda gözlenebilirin olasılık dağılımını hesaplamak için kullanılır. Bizim mülahazamızda açısal momentum işlemcilerini

$$\vec{J} = \vec{J}^\dagger, \qquad [J_\ell, J_m] = i\hbar \epsilon_{\ell m n} J_n$$

*Parantez içindeki nicelik $\ell \leftrightarrow m$ altında simetrikken $\epsilon_{\ell k m}$ bu yerdeğiştirme gerçekleştirildiğinde anti-simetriktir. Bu, çift toplam içindeki her terimin çift toplam içindeki başka bir terim tarafından sadeleştirileceğini garanti eder.

sağlayacak şekilde tanımladık. Yalnızca tek başına bu bağıntılardan bile açısal momentumun tayfsal özellikleri hakkında birçok şey öğreniriz.

J_i ve J^2 işlemcilerinin her birinin özvektörler aldığını kabul ediyoruz. Açısal momentumun özdeğer ve özvektörlerini, bu ikincisi J_z ve J^2'nin eşzamanlı özvektörleri olacak şekilde çalışalım. Şöyle yazarız,

$$J^2|a,b\rangle = a|a,b\rangle, \qquad J_z|a,b\rangle = b|a,b\rangle.$$

a ve b'nin muhtemel değerleri aynen bir salınıcının Hamilton işlemcisinin spektrumunda yükseltme ve alçaltma işlemcilerinin kullanılmasıyla çıkarıldığı yolla bulunabilir. Bu amaçla, açısal momentum *merdiven işlemcileri*ni tanımlıyoruz

$$J_\pm = J_x \pm iJ_y, \qquad J_\pm^\dagger = J_\mp.$$

Tabii ki, bu iki işlemci J_x ve J_y ile aynı fiziksel bilgiyi içeriyorlar. Merdiven işlemcileri cinsinden, açısal momentum sıradeğişimi bağıntıları

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm, \quad [J_\pm, J^2] = 0, \quad [J_\pm, J_\mp] = \pm 2\hbar J_z$$

şeklinde ifade edilebilir (alıştırma). Bu bağıntılardan $J_\pm|a,b\rangle$ vektörünün

$$J^2(J_\pm|a,b\rangle) = a(J_\pm|a,b\rangle), \quad J_z(J_\pm|a,b\rangle) = (b\pm\hbar)(J_\pm|a,b\rangle)$$

sağladığını görebiliriz (alıştırma).

Bundan dolayı, açısal momentum işlemcileri (J^2 ve J_z'nin özvektörleri) üzerine etkirken, merdiven işlemcileri açısal momentumun büyüklüğünü korur fakat z bileşeni bir "açısal momentum kuantumu" $\hbar$ kadar arttırır/azaltır.

Devam edecek...