Ders 22

Metindeki ilgili bölümler §3.1, 3.2

Kuantum mekaniğinde dönme hareketleri

Şimdi, bir evvelce düşündüğümüz hususların kuantum mekaniği ile olan ilgisini irdeleyeceğiz. Kuantum mekaniğinde uzay ve zamandaki dönüşümler sisteme ait Hilbert uzayında üniter dönüşümler ile "temsil edilir" veya "gerçekleştirilir". Buradaki fikir şudur : eğer 3-d'de bir sisteme bir dönüşüm uygularsanız, sistemin durumu değişir ve bu, sisteme ait durum vektörünün dönüşümü şeklinde matematiksel olarak temsil edilmelidir. Zamansal ve uzaysal ötelemelerin bu biçimde nasıl tasvir edildiğini zaten gördük. Bu aynı şablonu takip ederek, herbir R dönüşüne, $D(R)$ üniter dönüşümü tanımlamak istiyoruz, öyle ki, eğer $|\psi\rangle$ sisteme ait bir durum vektörü ise $D(R)|\psi\rangle$ sistemin R ile nitelenen dönüşe uğradıktan sonraki durum vektörünü temsil eder. Buradaki anahtar gereksinim, iki dönüşün birleşerek bir üçüncü dönüş yapması için gereken şablonun üniter işlemcilerle "taklit" edilmesidir. Bunun için, $D(R)$ üniter işlemcilerinin sürekli biçimde dönme eksenine ve açısına bağlı olmasını ve

$$D(R_1)D(R_2) = e^{i\omega_{12}}D(R_1R_2)$$

sağlamasını şart koşarız, burada ω_{12}, temsilinin de belirttiği gibi, R_1 ve R_2 dönüşlerinin seçimine bağlı olabilen gerçel bir sayıdır. Durum vektörü $D(R_1R_2)|\psi\rangle$, $e^{i\omega_{12}}D(R_1R_2)|\psi\rangle$ durumundan *fiziksel olarak* ayırt edilemediği için bu faz serbestliğine izin veriliyor.

Eğer, bu $D(R)$ üniter işlemci ailesini kurmayı başarırsak, bir "bir faz farkına kadar dönme grubunun üniter temsilini" veya bir "dönme grubunun projektif üniter temsilini" kurduğumuzu söyleriz. Bütün ω parametrelerinin, basitçe, dönüşlerin üniter temsilcilerini yapılandırmada birinin sahip olabileceği kısmi bazı serbestlikleri belirttiğini düşünebilirsiniz. (Eğer temsilde tüm ω parametreleri yok oluyorsa, sadece "dönme grubunun üniter temsili"nden bahsederiz.)

Dönme hareketlerinin temsilcileri için birleşme kuralındaki bu olası faz serbestliği tamamen kuantum mekaniksel bir ihtimaldir ve önemli fiziksel neticeler doğurur. Bu arada, ders kitabınız, dönme hareketlerinin temsilinin genel tanımında bu faz serbestliğine izin vermekte sınıfta kalıyor. Bu pedagojik bir hatadır ve bunda da önemlidir. Bu hata çok ironiktir : ders kitabı, ilk örneğinde, $D(R)$ işlemcilerini spin 1/2 sistemi için veriyor ki burada faz faktörleri, göreceğimiz gibi, kesinlikle değersiz değildir.

Sonsuz Küçük Dönmeler ve Açısal Momentum

$D(R)$ sürekli tarzda bir eksene ve bir açıya bağlı olduğu için, bunun sonsuz küçük formunu düşünebiliriz. Sabit bir $\hat{n}$ ekseni ve sonsuz küçük ϵ için

$$D(R) \approx I - \frac{i}{\hbar}\epsilon\vec{n}\cdot\vec{J}$$

elde ederiz, burada

$$\vec{J} = (J_1, J_2, J_3) = (J_x, J_y, J_z)$$

$J_i^\dagger = J_i$ açısal momentum boyutunda (bunların matris elemanların ve özdeğerlerinin bu boyutta olmaları hasebiyle), kendine eşlenik işlemcilerdir. J_i işlemcisi, Hilbert uzayında, x^i ekseni etrafında dönmeye karşılık gelen dönüşümler üretir. Bu J_i işlemcilerini, sisteme ait açısal momentum gözlenebilirleri ile tanılarız. Tabii ki, açısal momentumun bu matematiksel modelinin fiziksel sağlaması fiziksel sistemlerin tasvirindeki bu stratejinin açık başarısına dayanmaktadır. Özellikle, J_i (uygun koşullar altında) korunacaktır.

Hilbert uzayında üniter dönüşümlerin 3-d uzaydaki dönmeleri düzgün bir şekilde "taklit" (daha doğrusu, "projektif olarak temsil") etmesini talep ederek, açısal momentum işlemcilerinin

$$[J_k, J_\ell] = i\hbar\epsilon_{k\ell m}J_m$$

sıradeğişimi bağıntılarını sağladığı gösterilebilir (faz faktörlerinin ihmal edildiği bir biçimi için kitabınıza bakın). İspatın biraz sürmesi ve burada gözardı edilmesine rağmen, bu sonuç oldukça anlamlıdır. Gerçekten de 3-d uzayda sonsuz küçük üreteçlerin sıradeğişimi bağıntıları çeşitli dönme hareketlerinin arasındaki geometrik bağlantıyı kodluyor. Bundan dolayı, durum vektörlerinin uzayında dönmelerin üreteçlerinin, 3-d uzayda dönmelerle aynı sıradeğişimi bağıntılarına uyma gerekliliği sürpriz değildir (bir $i\hbar$ farkıyla ki, bu $\vec{J}$'yi tanımlama şeklimizden ortaya çıkıyor).

Spin 1/2 sistemi için spin gözlenebilirlerinin bu sıradeğişimi bağıntılarını sağladığını ödevinizde gördünüz. Bu sebeple, spin gözlenebilirlerini bir çeşit açısal momentum gibi olduğunu tespit ediyoruz. Bu sadece bir terminoloji meselesi değildir. Kapalı bir sistemde (örneğin, bir atomik elektron ve bir foton), açısal momentum korunur. Ancak, bir altsistemin (örneğin bu elektron) açısal momentumunun korunması gerekli değildir, çünkü toplam açısal momentum korunacak şekilde sistemin geri kalanı (örneğin bu foton) ile açısal momentum değiş-tokuşu yapabilir. Bu şekilde, açısal momentumun korunumu tarafından sağlanan bu "muhasebe", "hesapları dengelemek" için spin açısal momentum katkısının işe dahil edilmesini gerektirir. Spin açısal momentum, kapalı bir sistemin korunan açısal momentumuna bir katkı sağlar.

Zaman ve uzay ötelemelerinde kulandığımız matematiksel teknolojinin aynısını kullanarak, (sonsuz küçüğün tersine) sonlu bir dönmenin formal olarak

$$D(\vec{n},\theta) = \lim_{N\to\infty}(I - \frac{i}{\hbar}\frac{\theta}{N}\vec{n}\cdot\vec{J}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\vec{n}\cdot\vec{J}}$$

formülüne yol açan "birçok" sonsuz küçük dönmeden yapılandırılabileceğini görmek zor değildir.

Bu üstel işlemcinin, $\vec{J}$'ninki gibi, detaylı formu, çalışılan özel fiziksel sisteme bağlıdır. Açısal momentumun en bilindik formu herhalde 3-d'de hareket eden bir parçacığınkidir. Bununla beraber, spin, açısal momentumun bir türüdür (yukarıdaki tipte bir analize göre) ve matematiksel olarak konuşursak en kolayıdır. Dolayısıyla, ilk önce buna bakacağız.

Açısal momentum olarak spin

S_i, spin 1/2 gözlenebilirlerinin açısal momentum boyutunda olduğunu ve açısal momentum sıradeğişimi bağıntılarını sağladığını hatırlayacaksınız :

$$[S_k, S_\ell] = i\hbar\epsilon_{k\ell m}S_m$$

Biz bundan dolayı spin 1/2 sistemin dönmelerinin

$$D(\vec{n}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{n}\cdot\vec{S}}$$

formundaki üniter işlemcilerle yerine getirildiğini buluyoruz. Haydi, şimdi, bir örneğe göz atalım.

z ekseni etrafında bir dönmeyi göz önüne alın. S_z'nin özvektörlerini bir baz olarak kullanıp

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matris elemanlarını elde ederiz, böylelikle dönme hareketi işlemcisinin matris elemanları (alıştırma)

$$D(\hat{z}, \theta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\theta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\theta} \end{pmatrix}.$$

Bu hesaplamayı üstel fonksiyonun kuvvet serisi tanımını kullarak yapabilirsiniz – bu gidişatı çabucak göreceksiniz. Tayfsal ayrışım tanımını da kullanabilirsiniz. herhangi bir kendine eşlenik A işlemcisi için elimizde

$$A = \sum_i a_i|i\rangle\langle i|$$

olduğunu hatırlayın, burada $A|i\rangle = a_i|i\rangle$. Benzer şekilde, ödevde gördüğünüz gibi

$$f(A) = \sum_i f(a_i)|i\rangle\langle i|.$$

Diyelim ki,

$$A = S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)$$

ve f uygun bir üstel fonksiyon olsun buna göre,

$$D(\hat{z}, \theta) = e^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z} = e^{-\frac{i}{2}\theta}|+\rangle\langle+| + e^{\frac{i}{2}\theta}|-\rangle\langle-|$$

elde edersiniz.

Bu üniter işlemci ailesinin olması gerektiği gibi

$$D(\hat{z},\theta_1)D(\hat{z},\theta_2) = D(\hat{z},\theta_1+\theta_2)$$

sağladığını gözden kaçırmayın. Diğer taraftan, ilginç birşeyin gerçekleştiğini hemen farketmelisiniz. Spin 1/2 sisteminin 2π'lik bir dönmeye karşılık gelen üniter dönüşümü özdeşlik değil, aksine eksi özdeşliktir! Bundan dolayı, eğer spin 1/2 sistemi 2π kadar döndürürseniz, bunun $|\psi\rangle$ durum vektörü

$$|\psi\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}(2\pi)S_z}|\psi\rangle = -|\psi\rangle$$

haline dönüşür. Gerçekten de, sadece 4π kadar bir dönmeden sonra spin 1/2 durum vektörü orijinal değerine geri gelir. Bu kötü görünüyor; böyle bir dönüşüm kuralı nasıl deneyle örtüşür? Aslına bakarsak, beklenen değerler bu işaret değişimine karşı duyarsız olduğu için herşey çok iyi işliyor :

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \to \langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}(2\pi)S_z}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(2\pi)S_z}|\psi\rangle = \langle\psi|(-1)A(-1)|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

Burada olan şey şudur, spin 1/2 sistemi projektif temsildeki faz serbestliğinden faydalanıyor. Bir taraftan da elimizde

$$R(\hat{n},\theta)R(\hat{n},2\pi-\theta) = R(\hat{n},\theta) = R(\hat{n},0) = I$$

var. Spin 1/2 temsili için

$$D(\hat{n},\theta)D(\hat{n},2\pi-\theta) = -I = -D(\hat{n},0)$$

elde ederiz.

Dönme hareketlerinin temsilindeki faz serbestliği daha çok, kuantum mekaniğinin fiziksel dünyayı tasvir etme yollarının güç anlaşılan ve çapraşık bir özelliğidir. Teorinin bu inceliğinden dolayı spin 1/2 sistemlerini tam anlamıyla barındırabiliyoruz. Bu, kuantum mekaniğinin büyük başarılarından biridir. Gözlenebilir büyüklükler, z etrafında döndürdüğümüzde genel olarak nasıl değişir? Beklenen değer z etrafında bir dönme altında

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \to \langle\psi|e^{\frac{i}{\hbar}\theta S_z}Ae^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z}|\psi\rangle$$

yoluyla dönüşür. Örneğin $A = S_x$ seçin. Üstelleri Taylor serisine açarak veya tayfsal ayrışımı kullanarak ve

$$S_z = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|), \qquad S_x = \frac{\hbar}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|)$$

ifadelerinden faydalanarak

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}\theta S_z}Ae^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z} &= \frac{\hbar}{2}(e^{i\theta}|+\rangle\langle-| + e^{-i\theta}|-\rangle\langle+|) \\ &= \cos\theta S_x - \sin\theta S_y \end{aligned}$$

elde ederiz (alıştırma). Bir vektörün x bileşeni, z ekseni etrafındaki bir dönme altında tam olarak bu şekilde dönüşür.

$$\langle S_x \rangle \to \cos\theta \langle S_x \rangle - \sin\theta \langle S_y \rangle$$

Durum vektörü dönüşürken benzer şekilde,

$$\langle S_y \rangle \to \cos\theta \langle S_y \rangle + \sin\theta \langle S_x \rangle$$

takip eder ve kolayca,

$$\langle S_z \rangle \to \langle S_z \rangle$$

olduğunu görebilirsiniz.

İşlemciler üzerinde temsil edilen dönme hareketleri

Yukardaki sonucun peşini bırakmadan devam edelim. Gördük ki,

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta S_z} A e^{-\frac{i}{\hbar}\theta S_z} = \cos\theta S_x - \sin\theta S_y$$

Yukarıdaki denklemde sol tarafta 3 Hilbert uzayı işlemcisinin çarpımı görünüyor ki bu, bir dönme hareketinin yerini tutan üniter bir dönüşüm yoluyla sistemin durumunu değiştirdiğinizde spin vektörü gözlemlenebilirine ne olduğuna karşılık gelir. Denklemin sağ tarafındaki işlemci, sanki 3-d uzayda bir vektörün bileşeniymiş gibi döndürürerek elde ettiğiniz spin işlemcilerinin doğrusal bir kombinasyonudur. Bu, 3-d uzaydaki dönme hareketlerini bunların durum vektörlerinin uzayındaki üniter temsilcilerine bağlayan genel bir kuralı yansıtır :

$$D^\dagger(\hat{n},\theta)\vec{S}D(\hat{n},\theta) = R(\vec{n},\theta)\vec{S}$$

Bu bağıntıdan, $\vec{S}$ 'nin beklenen değerlerinin bir vektörün bileşenleri gibi davranacağını hemen görebilirsiniz. Daha genel olarak, eğer $\vec{V}$ bir vektör gözlenebiliri temsil eden Hilbert uzayında kendine eşlenik işlemcilerin herhangi bir üçlüsü ise, buradan

$$D^\dagger(\hat{n},\theta)\vec{V}D(\hat{n},\theta) = R(\vec{n},\theta)\vec{V}$$

Bunun, şimdi artık dönme hareketleri için, Heisenberg resmine benzeşik olduğunu düşünebilirsiniz. Sistemin bir dönmesi matematiksel açıdan durum vektörünün bir dönüşümü olarak, veya eşit bir biçimde, gözlenebilirlerin bir dönüşümü olarak görülebilir (fakat her ikisi birden değil!).