Ders 21

Metindeki ilgili bölümler §3.1, 3.2

Üç boyutta dönme hareketleri

Açısal momentumu, şimdi, uzayda dönme hareketlerinin üreteci şeklindeki geometrik yorumunu kullanarak irdelemeye başlıyoruz. Başlarken tartışmamızın bir miktar kafa karıştırıcı olabileceğini vurgulamalıyım. Çünkü, vektörleri ve doğrusal işlemcileri 2 farklı uzayda çalışıyor olacağız : (i) bizim yaşadığımız 3-d (Öklit) uzayı, ve (ii) kuantum durum vektörlerinin Hilbert uzayı. 3-d dönme hareketleri, tabii ki, kuantum durumlarının uzayı üzerinde karşılık gelen dönüşümlere bağlanacaktır, fakat çeşitli büyüklüklerin hangi uzayla ilintili olduğunu karıştırmak çok da zor değildir. Dolayısıyla, dikkatli olun.

Üç boyutta dönme hareketlerini ilgilendiren dazı elementer sonuçları özetleyerek başlıyoruz. *Tartışmanın bu kısmı kuantum mekaniksel değerlendirmelerden tamamen bağımsızdır.* Size ayrıca belirtilmedikçe, yaptığımız herşey sadece yaşadığımız 3-d uzaydaki gözlenebilirlerin dönme hareketlerine ait özelliklere ait olacaktır.

Bir fiziksel sisteme ait bir $\vec{V}$ vektör gözlenebiliri bir döndürmeye (özel) bir ortogonal dönüşüme uyarak tepki verir :

$$\vec{V} \longrightarrow R\vec{V}$$

Burada, R, 3-d vektörlerin doğrusal bir dönüşümüdür, öyle ki,

$$(R\vec{V}) \cdot (R\vec{W}) = \vec{V} \cdot \vec{W}.$$

Açıkça, birbirlerine göre aralarındaki açılar olduğu kadar vektörlerin büyüklükleri de bu dönüşüm altında değişmezdir.

Eğer bir kartezyen bazda $\vec{V}$, $\vec{W}$ vektörlerini V, W sütun vektörleri olarak temsil ederseniz, skaler çarpım

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V^T W = W^T V$$

olur. Bundan sonra, R'yi $\vec{V}$'nin (Kartezyen) bileşenleri üzerine etkiyen 3×3 bir matris olarak ve

$$R^T = R^{-1}$$

sağlayacak (alıştırma) yani,

$$R^T R = I = R R^T$$

olacak şekilde temsil edebilirsiniz. Burada T üstindisi "transpoz" anlamında ve I 3×3 özdeşlik matrisidir. Böyle matrisler *ortogonal* olarak adlandırılır (neden olduğunu biliyor musunuz?).

Basit bir örnek olarak, z ekseni etrafında θ açısıyla bir dönüş

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ile temsil edilir.

Genellikle, dönme hareketleri, bir orijine göre tanımlıdır, ki bu tüm dönme hareketleri için sabittir. Daha sonra, dönüş, orijinden geçen bir dönme *ekseni* ve bu eksen etrafında bir dönme açısı ile tanımlanır. Bu eksen bir $\hat{n}$ birim vektörü ile belirtilebilir. Orijinden geçen $\hat{n}$ yönünde bir eksen ve θ açısıyla tanımlı ortogonal dönüşüm için $R(\hat{n}, \theta)$ yazacağız. Dönüş yönü (saatin tersi ya da saat yönü) sağ el kuralı ile belirlenir. Herhangi bir tek dönüş için herzaman z eksenini $\hat{n}$ yönünde seçebiliriz ve böylece dönüş matrisi yukarıdaki formu alır. Kuşkusuz ki, farklı eksenler etrafında farklı dönme hareketleri düşünüldüğünde, bunların hepsi bu basit forma sokulamaz. Bir dönüşü belirtmek için 3 sayı ($\hat{n}$ için iki, θ için bir) gerektiğini görebilirsiniz. Bir nokta etrafındaki bütün dönme hareketlerinin kümesi üç boyutlu bir grup oluşturur (3 parametresi olduğu için). Bu, özellikle, her dönüşün tersinin olduğu ve iki dönüşün çarpımının üçüncü bir dönüşe eşit olduğu anlamına gelir. Bu grup *dönme grubu* olarak adlandırılır ve $SO(3)$ ile gösterilir. "3", "üç boyutta dönüş" manasındadır. "O" "ortogonal" demektir. Ve "S" "özel" anlamına gelir. Bu üçüncü sıfat bütün ortogonal dönüşümler dönüş olmadığı için ortaya çıkar, ayrıca bunlar kesikli dönüşümleri de içerir : yansımalar ve tersinmeler. Bütün ortogonal matrislerin determinantı ± 1'dir. Bunu görmek için, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ve $\det(A^T) = \det(A)$ olduğunu hatırlayın. Böylece,

$$OO^T = I \Longrightarrow [\det(O)]^2 = 1.$$

Dönme hareketleri, determinantı bir olan matrislerle tasvir edilir, oysa ki kesikli dönüşümlerin (öyleymiş gibi görünseler bile dönme hareketi değildirler) determinantları negatiftir. Örneğin,

$$\vec{V} \longrightarrow -\vec{V}$$

dönüşümü 3×3 ortogonal $O = -I$ matrisi ile verilir ki, determinantı -1'dir. Dönüş grubu, ardışık dönme hareketleri ancak ve ancak aynı eksen etrafında ise sıradeğişmeli olduğu için *Abeliyen değil*dir, ki bu, "sıradeğişmeli olmayan" manasındadır. Ardışık dönmelerin birleşip üçüncü bir dönme hareketi yapma yolları biraz girifttir. Bununla beraber, bu karmaşık davranış sonsuz küçük dönmeleri çalışarak yararlı bir biçimde analiz edilebilir.

Sonsuz küçük dönme hareketleri

Amacımız, açısal momentumu *kuantum durumların uzayında* dönme hareketlerinin sonsuz küçük üreteci olarak görmektir. Öyleyse, dönme hareketlerini sonsuz küçük bir bakış açısıyla anlamamız gerekir. Dönüşler sürekli olarak dönme açısına bağlı olduğu için “sonsuz küçük” olan yani neredeyse özdeşlik olan dönme hareketlerini göz önüne alabiliriz. Bir $\hat{n}$ ekseni etrafında $\epsilon << 1$ açısıyla *3-d uzayda* bir sonsuz küçük dönme

$$R(\hat{n},\epsilon) \approx I + \epsilon G$$

şeklinde yazılabilir. Burada, doğrusal dönüşüm G dönme hareketlerinin üreteci 3×3 bir matristir ve ϵ^2 mertebeli terimleri ihmal ediyoruz. (Şu an, 3-d uzayda dönme hareketlerini düşündüğümüzü vurgularım. Henüz, durum vektörleri üzerinde dönme hareketlerinin temsiline geçmedik.) Eğer $R(\hat{n},\epsilon)$ ortogonal olacaksa G anti-simetrik bir matris olmalıdır (alıştırma) :

$$G^T = -G$$

Örneğin, $\hat{n}$, z yönündeyse

$$G_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde ederiz (alıştırma). Herhangi bir eksen etrafında dönüş için dönüş üretecini tanımlayabiliriz.

$$R(\hat{n},\epsilon) \approx I + \epsilon\hat{n}\cdot\vec{G}$$

yazarız, burada

$$\vec{G} = (G_1, G_2, G_3) = (G_x, G_y, G_z)$$

anti-simetrik matrislerin 3-boyutlu vektör uzayında bir bazdır. G_z yukarıda gösteriliyor; dönüş matrislerini belirtilen eksenlerde dönme açısında birinci mertebeye kadar açarak G_x ve G_y’ın formlarını kolayca hesaplayabilirsiniz (alıştırma) :

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dolambaçsız bir hesap (alıştırma)

$$[G_i, G_j] = \epsilon_{ijk} G_k$$

verir. Bunlar sonsuz küçük dönme hareketlerinin *sıradeğişimi bağıntılarıdır*. Bunlar, net bir dönüş etmek için ardışık dönme hareketlerinin birleşme yollarının (sonsuz küçük bile olsa) tam bir izahatını verir. Esasında, üreteçler ve bunların konütasyon bağıntıları dönme grubunu tanımlar. Gerçekten de, aynen ötelemelerde olduğu gibi, sonsuz sayıdaki sonsuz küçük dönme hareketleriyle

$$R(\hat{n},\theta) = \lim_{N\to\infty} (I + \frac{\theta}{N}\hat{n}\cdot\vec{G})^N = e^{\theta\hat{n}\cdot\vec{G}}$$

ifadesiyle $\hat{n}$ ekseni yönünde sonlu dönüş kurabiliriz. Sıradeğişim bağıntıları farklı işlemciler arasındaki ilişkileri kodlar.

3-d uzaydaki dönme hareketlerinin üreteçlerine ait bu sıradeğişim bağıntılarının spin işlemcilerinin bileşenleri için karşılaştıklarınıza ne kadar çok benzediğini dikkate alın. Şüphesiz ki, bu vektör gözlenebilirler 2-d Hilbert uzayında işlemcileri oluşturur. Fakat, sıradeğişimi bağıntılarındaki bu benzerliğin kazara olmadığını göreceğiz.