Ders 20

Metindeki ilgili bölümler §2.6, 3.1

Ayar dönüşümleri (devam)

Potansiyeller bir ayar dönüşümü ile tekrar tanımlandığında Hamilton işlemcisinin spektrumunun değişmeyeceğine dair ispatımız, modelimizi, tüm olasılıklar ayar dönüşümünden etkilenmeyecek şekilde nasıl kullanmak istediğimizi de gösteriyor. Hükmediyoruz ki, eğer $|\psi\rangle$, $(\phi, \vec{A})$ potansiyelleri ile tanımlı EM alandaki bir parçacığın durum vektörü ise

$$|\psi\rangle' = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}|\psi\rangle$$

parçacığın, ayar dönüşmüş $(\phi', \vec{A}')$ potansiyelleri kullanıldığındaki durum vektörüdür. Bunun bir üniter dönüşüm olduğunu dikkate alın.

Şimdi bu reçetenin neden işe yaradığını görelim. Bir parçacığa ait bütün gözlenebilirler konum ve momentumun fonksiyonlarıdır. Burada "momentum" ya kanonik ya da mekanik anlamındadır. Konum gözlenebiliri (Schrödinger resminde) ayar ne olursa olsun herzamanki $\vec{X}$ işlemcisi ile temsil edilir. Konumun herhangi bir G gözlenebilir fonksiyonu bir ayar dönüşümü altında değişmeyen bir beklenen değere sahiptir :

$$'\langle\psi|G(\vec{X})|\psi\rangle' = \langle\psi|e^{-\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})} G(\vec{X}) e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}|\psi\rangle$$

Gidişat momentum işlemcininde daha ilginç bir hal alır. Mekanik momentum ayar-değişmez bir gözlenebilirdir. Fakat, bu, ayar dönüşümü altında değişen bir işlemciyle temsil edilir. Gerçekten de

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}, \qquad \vec{\Pi}' = \vec{p} - \frac{q}{c}(\vec{A} + \nabla f)$$

elde ederiz. Bununla beraber,

$$\vec{\Pi} e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}|\psi\rangle = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})} \vec{\Pi}|\psi\rangle$$

olduğunu kontrol etmek dolambaçsızdır (alıştırma). Farklı bir ifadeyle, elimizde, ayar dönüşümü altında üniter bir dönüşüm olarak dönüşen mekanik momentumu – ki, ayar-değişmez bir gözlenebilirdir – temsil eden işlemci var :

$$\vec{\Pi}' = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})} \vec{\Pi} e^{-\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}$$

Konumun ve (mekanik) momentumun herhangi bir fonksiyonu benzer bir dönüşüm yasasına sahiptir. Özellikle, Hamilton işlemcisi,

$$H = \frac{1}{2m}\Pi^2 + q\phi$$

biçiminde ifade edilebilir (alıştırma), böylece

$$H' e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}|\psi\rangle = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})} H|\psi\rangle$$

sonucunu takip eder (alıştırma), ki bu

$$H' = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})} H e^{-\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}.$$

Kuantum mekaniğinin fiziksel çıktısı durum vektörlerinin üniter bir dönüşümü ve gözlenebilirlerin üniter (benzerlik) bir dönüşümü ile değişmez. Bunun sebebi beklenen değerlerin bu halde değişmemesidir :

$$\langle \psi | C | \psi \rangle = \langle \psi' | C' | \psi' \rangle$$

burada

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle, \qquad C' = UCU^\dagger.$$

Mekanik momentumun (herhangi bir fonksiyonunun) beklenen değerini hesaplarken $|\psi\rangle$ durumu ve $\vec{\Pi}$ işlemcisini kullanabileceğinizi veya $|\psi\rangle'$ durumu ve $\vec{\Pi}'$ işlemcisini kullanabileceğinizi ve aynı cevabı elde edeceğinizi görmek şimdi kolaydır. Bu yolla, kuantum mekaniğinin fiziksel çıktısının uygunca ayar değişmez olduğu söylenir. Değişik potansiyel seçimleri aynı fiziğin üniter olarak birbirine denk matematiksel temsillerine sebep olur.

Tüm bunların hepsini zamana bağlı $f = f(t, \vec{x})$ ayar dönüşümlerine genellemek zor değildir. Burada, basitçe gözlemliyoruz ki, eğer $|\psi, t\rangle$ bir potansiyel kümesi için Schrödinger denkleminin çözümü ise o zaman,

$$|\psi, t\rangle' = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(t, \vec{X})} |\psi, t\rangle,$$

f ile tanımlanan bir ayar dönüşümü tarafından elde edilmiş potansiyeller için çözümdür (alıştırma). Böylece, zamanın fonksiyonları olarak olasılık dağılımları için ayar değişmez sonuçlar elde edilir. Bu netice ayrıca Schrödinger denkleminin konum dalga fonksiyonları çözümlerinin de ayar dönüşümü altında

$$\psi(\vec{X}, t) \longrightarrow e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{x})} \psi(\vec{x}, t)$$

şeklinde dönüştüğünü gösteriyor.

Aharonov-Bohm etkisi

Bir parçacık, bir manyetik alanın ortadan yok olmadığı bölgede, yok olan bulunma olasılığına sahip olsa bile Aharonov-Bohm etkisi, bu manyetik alanın bu parçacığın davranışı üzerindeki etkisini içerir. Şüphesiz ki, klasik olarak Lorentz kuvvet yasası böyle bir davranışa yol açmaz. Buna rağmen, AB etkisi deneysel olarak görülmüştür. Bir ödev probleminde bu etkinin bir biçimini araştıracaksınız. Burada size sadece böyle bir sonucun teknik açıdan nasıl olabileceğini göstereyim.

AB etkisinin kilit noktası, manyetik alanın, (yüklü parçacığın hariç tutulacağı) bir bölgede yok olmadığı ve parçacığın bulunmasına izin verilen basit olmayan bağlantılı bir bölgede yok olduğu bir fiziksel vaziyet oluşturmaktır. Manyetik alan o bölgede kaybolduğu için,

$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

elde ederiz. Uzayın basit bağlantılı, "büzülebilir" bir bölgesinde böyle vektör alanları bir fonksiyonun gradyeni olmalıdır. Bu halde, potansiyel sıfıra ayar dönüştürülebilir, ve bu bölgede manyetik alanın gözlenebilir hiçbir etkisi olmayacaktır. Halbuki, eğer bölge basit bağlantılı değilse $\vec{A}$'nın gradyen, yani "sırf ayar", olması gerekmez. Bir örnek olarak (ödevinizle bağlantılı), aşağıdaki senaryoyu çalışırız.

Ekseni yönünde (B şiddetinde) düzgün manyetik alan olan silindirik bir bölge düşünün. Bunun, (idealleştirilmiş) bir selenoid yoluyla kurulmuş olduğunu hayal edin. Silindirin dışında manyetik alan yok olur, fakat silindirin dışındaki vektör potansiyel bayağı olmamalıdır. Özellikle, $\vec{A}$, silindirin dışında hiçbiryerde bir fonksiyonun gradyeni olamaz. Bunu görmek için, Stokes teoreminden

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

elde ederiz, burada C silindiri çevreleyen kapalı bir kontur ve S sınırları C olan bir yüzeydir. Böylece, S içinden geçen $\vec{B}$ akısı sıfırdan farklı (ki bizim örneğimizde değildir) ise sağ taraf hiçbir zaman sıfır olmaz. Fakat, eğer $\vec{A}$ bir gradyen ise sol taraf yok olur (alıştırma) – çelişki. Aslında, vektör potansiyel

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\frac{BR^2}{2r}\hat{e}_\theta, \qquad r > R$$

olarak alınabilir (alıştırma) burada R silindirin yarıçapı, $r > R$ silindirik radyal koordinat ve $\hat{e}_\theta$ artan silindirik açı yönündeki bir birim vektördür. $\vec{A}$ mecburen (ayar dengi olarak) sıfır olmadığı için enerji spektrumunu etkileyebilir – ve etkiler.

Açısal momentum - giriş notları

Kuantum mekaniğinde açısal momentumun teorisi bir çok açıdan önemlidir. Bir kaç basit prensipten gelen, bu teorinin pek çok sonucu, kuantum mekaniğinin, atomik, moleküler, nükleer ve başka atomaltı sistemlerdeki uygulamalarında yaygınca kullanılıyor. İşin içine dahil olan matematiksel stratejiler, kuantum mekaniğindeki başka çeşit simetri ve korunum yasalarına bir çok önemli genellemeler getirir. Açısal momentumun kuantum mekaniksel teorisi doğal olarak "kendine özgü spin" kavramına yol açar. Tıpkı spin 1/2'de gördüğümüz gibi, kuantum mekaniğinde açısal momentumun genel bir özelliği, herhangi iki spin bileşenine karşılık gelen gözlenebilirlerin uyuşumsuzluğudur. Bu uyuşumsuzluğun doğası açısal momentumun neredeyse tüm özelliklerinin kalbinde vardır.

Aynen çizgisel momentumun fiziksel sistemin ötelenmesi kavramı ile çok yakından bağlantılı olması gibi açısal momentum göz önüne alınan fiziksel sistemin dönme hareketinin teorisine derinden bağlıdır. Açısal momentumun bu geometrik yorumunu tartışmamızın başlangıç noktası olarak kullanacağız.