Ders 19

Metindeki ilgili bölümler §2.6

Elektromanyetik bir alanda yüklü parçacık

Şimdi, kuantum mekaniğinin son derece önemli başka bir örneğine geçiyoruz. Verilen bir elektromanyetik alanda hareket eden m kütleli ve q elektrik yüklü relativistik olmayan bir parçacığı tasvir etmeye çalışalım. Bu sistemin fiziksel önemi açıktır.

Aynı $\vec{X}$ konum ve (momentumun anlamını ilgilendiren, daha sonra bahsedilecek, bir incelik bulunmasına rağmen) $\vec{P}$ momentum işlemcilerini (Schrödinger resminde) kullanıyoruz. Elektromanyetik alanı tarif etmek için $\phi(\vec{x}, t)$, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ elektromanyetik skaler ve vektör potansiyelleri kullanmaya ihtiyacımız var. Bunlar bilinen ($\vec{E}$,$\vec{B}$) elektrik ve manyetik alanlarına

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

ile bağlıdır. Kütlesi m ve elektrik yükü q olan bir parçacığın dinamiği

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{X}, t)\right)^2 + q\phi(\vec{X}, t)$$

Hamilton işlemcisi ile belirlenir. Bu Hamilton işlemcisi, Hamilton işlemcisi mekaniğindeki klasik ifade ile aynı formu alır. Heisenberg hareket denklemlerini çıkararak ve onların Lorentz kuvvet yasasına eşdeğer olduğunu görerek bunun H için makul bir form olduğunu görürüz, ki şimdi bunu göstereceğiz.

Sadelik adına, potansiyellerin zamandan bağımsız olduğunu kabul edelim. Böylece Heisenberg ve Schrödinger resmi Hamilton işlemcileri aynı olur, ve

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{X})\right)^2 + q\phi(\vec{X})$$

formunu alır. Konumlar için

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\vec{X}(t), H] = \frac{1}{m}\{\vec{P}(t) - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{X}(t))\}$$

elde ederiz (alıştırma). (Aynen klasik mekanikteki gibi) momentumun – ötelemelerin üreteci olarak tanımlı – ille de kütle kere hız olmadığını, bilakis

$$\vec{P}(t) = m\frac{d\vec{X}(t)}{dt} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{X}(t))$$

olduğunu görüyoruz. Klasik mekanikte olduğu gibi $\vec{P}$'yi bazen *kanonik momentum* olarak adlandırırız ki *mekanik momentum*'dan ayırabilelim

$$\vec{\Pi} = m\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{X}(t))$$

Kanonik momentum tek tipte olmayan potansiyellerin formuna bağlı iken mekanik momentumun doğrudan bir fiziksel anlamı olduğunu dikkate alın. Bunu biraz sonra ayrıntıları ile tartışacağız.

Kanonik momentumun bileşenleri uyuşumlu iken

$$[P_i, P_j] = 0$$

mekanik momentumunkiler değildir (!) :

$$[\Pi_i, \Pi_j] = i\hbar\frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right) = i\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}B^k$$

Bu nedenle, bir manyetik alanın varlığında, mekanik momentum bir belirsizlik ilkesine uyar! Bu kuantum mekaniğinin şaşırtıcı, anlaşılması kolay olmayan ve çok sağlam bir tahminidir. Özellikle, alan düzgün ise mekanik momentumun iki bileşeni, daha ziyade sıradan konum ve momentum gibi, durumdan bağımsız bir belirsizlik bağıntısına uyar. Bu öngörünün doğruluğu gösterilebilir mi? Ödev problemlerinizde göreceğiniz gibi bir manyetik alanın varlığında mekanik momentumun bileşenlerinin bu uyuşumsuzluğu, düzgün manyetik alan içindeki yüklü bir parçacığın enerjisinin "Landau düzeyleri"nden sorumludur. Bu düzeyler yoğun madde fiziğinde iyi bilinmektedir.

Geriye kalan Heisenberg denklemleri kümesi, en yalın ve basit şekilde, mekanik momentum kullanılarak ifade edilir.

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} + q\phi(\vec{X})$$

ile başlayarak, mekanik momentumun bileşenleri arasındaki sıradeğişimi bağıntılarını (yukarıda) kullanarak ve

$$[X^i, \Pi_j] = i\hbar\delta^i_j I$$

ifadesini kullanarak

$$\frac{d}{dt}\vec{\Pi}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\vec{\Pi}(t), H] = q\left\{\vec{E}(\vec{X}(t)) + \frac{1}{2mc}\left(\vec{\Pi}(t)\times\vec{B}(\vec{X}(t)) - \vec{B}(\vec{X}(t))\times\vec{\Pi}(t)\right)\right\}$$

elde ederiz (alıştırma). $\vec{\Pi}$ ve $\vec{B}$'nin muhtemel sıradeğişmeli olmama hali hariç, bu, işlemci gözlenebilirlerin herzamanki Lorentz kuvveti yasasıdır.

Schrödinger denklemi

Schrödinger resminde dinamik Schrödinger denklemi ile kontrol edilir. Bunu konum dalga fonksiyonları için hesaplarsak,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x})\right)^2\psi(\vec{x},t) + q\phi(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t)$$

elde ederiz (alıştırma). Sol taraf Hamilton işlemcisinin doğrusal bir işlemci olarak konum dalga fonksiyonları üzerine etkimesini temsil ediyor. Detaylıca

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{q\hbar}{imc}\left[\vec{A}\cdot\nabla\psi + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\vec{A})\psi\right] + [\left(\frac{q}{c}\right)^2 A^2 + q\phi]\psi$$

elde ederiz.

Bilebileceğiniz gibi, “Coulomb ayar“ını sağlayan bir vektör potansiyel, kullanmak için (eğer gerekliyse bir ayar dönüşümü kullanmak suretiyle) herzaman düzenlenebilir :

$$\nabla\cdot\vec{A} = 0$$

Bu halde, konum dalga fonksiyonları üzerinde Hamilton işlemcisi

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{q\hbar}{imc}\vec{A}\cdot\nabla\psi + [\left(\frac{q}{c}\right)^2 A^2 + q\phi]\psi$$

formunu alır. Dikkate alınan, bazı tipik elektromanyetik potansiyeller şunlardır.

(i) Coulomb alanı,

$$\phi = \frac{k}{|\vec{x}|}, \qquad \vec{A} = 0$$

ki, bu hidrojen atomunun basit bir modelinde rol oynuyor; durağan durumlarının spektrumu size tanıdık geliyor olmalı. Yakında, bunu, açısal momentum mevzuları çerçevesinde bir miktar çalışacağız.

(ii) Düzgün bir $\vec{B}$ manyetik alanı, ki,

$$\phi = 0, \qquad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{x}.$$

Vektör potansiyel, elbette, tek bir tane değildir. Bu potansiyel Coulomb ayarındadır. Bu sistemi ödevinizde keşfedeceksiniz. Durağan durum sonuçları ilginçtir. Manyetik alan yönündeki hareketten gelen sürekli bir spektrum elde edilir; fakat seçilen bir momentum değerinde, $\vec{B}$'ye dik düzlemdeki hareketten gelen kesikli "Landau düzeyleri" spektrumu vardır. Bunu görmek için Hamilton işlemcisi, bir boyutta serbest parçacığa bir harmonik salınıcı eklenmiş matematiksel forma getirilir; ödev probleminizin ana fikri budur.

(iii) Bir elektromanyetik düzlem dalga, ki

$$\phi = 0, \qquad \vec{A} = \vec{A}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - kct), \qquad \vec{k}\cdot\vec{A}_0 = 0.$$

Şüphesiz ki, bu son örnek zamana bağlı bir potansiyel içeriyor. Bu potansiyel, çok önemli olan, atomların ışıma alanı ile etkileşimi konusunu çalışmak için kullanılıyor; dönem sonuna doğru bunu çalışmak için belki zamanımız olacak.

Ayar dönüşümleri

Belirli bir EM alandaki yüklü bir parçacığa ait modelimizin perde arkasında gizlenen ince bir konu var. Çeşitli gözlenebilirleri temsil eden işlemcilerde potansiyelerin açıktan görünmesi ile bir ilgisi var. Örneğin, Hamilton işlemcisi – parçacığın enerjisini temsil etmeli – çok kuvvetli bir şekilde potansiyellerin formuna bağlıdır. Mevzu, potansiyellerin formu, ve dolayısıyla Hamilton işlemcisi gibi işlemcilerin tek bir şekilde tanımlı olmaması hususunda birçok matematiksel anlam karmaşası olmasıdır. Bu kargaşanın kaynağını ayrıntılı olarak açıklayayım.

Elektromanyetiği çalışmanızdan hatırlayabilirsiniz ki, eğer $(\phi, \vec{A})$ verilen bir $(\vec{E}, \vec{B})$ EM alanını tanımlıyorsa,

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

ile verilen $(\phi', \vec{A}')$ potansiyelleri de *seçilen herhangi bir* $f = f(t, \vec{x})$ *için* aynı $(\vec{E}, \vec{B})$'yi tanımlar. Klasik elektrodinamikte tüm fizik $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ ile belirlendiği için böyle *ayar dönüşümü* ile birbirine bağlı bütün potansiyellerin klasik çerçevede fiziksel olarak eşdeğer olduğunu iddia ederiz. Kuantum çerçevesinde, benzer şekilde, potansiyellerin bu ayar bulanıklığının fiziksel olarak ölçülebilen büyüklükleri etkilememesi konusunda ısrar ederiz. Hem Hamilton işlemcisi hem de mekanik momentum, ayar-eşdeğer potansiyeller kullanıldığında matematiksel formları değişen işlemcilerle temsil edilirler. Mesele, fiziksel tahminlerin herşeye rağmen ayar değişmez olacağının nasıl garanti edildiğidir.

Bir an için Hamilton işlemcisi üzerinde odaklanalım. H'ın özdeğerleri izin verilen enerjileri tanımlar; bir durum vektörünün H'ın özvektörlerinde açılması enerji için olasılık dağılımını tanımlar; ve Hamilton işlemcisi sistemin zaman evrimini tanımlar. Soru, Hamilton işlemcisine ait bu fiziksel yönlerin potansiyellerin bu ayar dönüşümünden gerçekten etkilenip etkilenmeyeceğinden, ortaya çıkar. Eğer öyle olsa, bu Çok Kötü Birşey olurdu. Neyse ki, şimdi göstereceğimiz gibi, bir EM alanındaki bir parçacığa ait modelimiz, kuantum mekaniğinin fiziksel çıktılarının (spektrumlar, olasılıklar) ayar dönüşümlerinden etkilenmeyeceği bir şekilde tamamlanabilir.

(Yalnızca) sadelik adına, H'ın hala zamandan bağımsız olduğunu kabul ediyor ve sadece $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ olan ayar dönüşümlerini düşünüyoruz. Anahtar gözlem aşağıdaki gibidir. İki parçacığa ait, birbirinden potansiyellerin bir ayar dönüşümü kadar farklı olan H ve H' Hamilton işlemcilerini göz önüne alın, tabi ki bunlar birbirine fiziksel olarak denk olmalı. Bizim temsilimiz, eğer H, $(\phi, \vec{H})$ ile tanımlı ise H' ayar dönüştürülmüş

$$\phi' = \phi, \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f(\vec{x})$$

potansiyelleri ile tanımlı olacağı şeklindedir. Şimdi eğer $|E\rangle$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

ifadesini sağlıyorsa

$$|E\rangle' = e^{\frac{iq}{\hbar c} f(\vec{X})}|E\rangle$$

özvektörünün

$$H'|E'\rangle = E|E'\rangle$$

denklemini sağladığını doğrulamak (bir sonraki derse bakın) dolambaçsızdır.

Özdeğerin her iki durumda da aynı olduğunu dikkate alın. Bu $e^{\frac{iq}{\hbar c}f(\vec{X})}$ işlemcisi üniterdir, ve H ve H''in spektrumlarının aynı olduğuna işaret eder. Böylelikle, Hamilton işlemcisinin spektrumunun ayar dönüşümünden etkilenmediği, yani spektrumun *ayar değişmez* olduğu söylenebilir. Bundan dolayı, enerji spektrumunu hesaplamak için hangi potansiyel kullanılmak istenirse kullanılsın tahmin herzaman aynıdır.

Devam edecek...