Ders 18

Metindeki ilgili bölümler §2.3

Durağan durumlar ve klasik mekanik

Burada, klasik ve kuantum mekaniği arasındaki bağlantı hakkında çok önemli bir noktayı göstermek için salınıcıyı kullanacağız.

Şimdi çalıştığımız bu durağan durumlar açık bir dinamik davranış ortaya koymuyor. Bu salınıcıya has bir özellik değildir, fakat kuantum mekaniğinde durağan durumların genel bir özelliğidir. Bu, ilk bakışta klasik mekaniğe kıyasla biraz gariptir. Düşünün : konum ve momentuma ait olasılık dağılımları belirli enerjili herhangi bir durumda zamandan bağımsızdır. Klasik mekanikte, konum ve momentum (ve enerji) zamanın her anında, kesinlik derecesinde belirlenebilir; konum ve momentuma ait değerler taban durumu dışındaki her durumda zaman içinde salınır.* Kuantum tasvirde, konum, momentum ve enerji gözlenebilirlerinin uyuşumsuzluklarının ışığı altında, uyarılmış durumlardaki klasik ve kuantum öngörüler doğrudan kıyaslanamaz. Kuantum öngörüler tamamen istatistikseldir, ki bu, tekrarlı durum hazırlamalarını – sadece enerjileri ile belirtilen durumlar – ve çeşitli gözlenebilirlerin ölçümlerini içerir. Eğer kuantum ve klasik tasvirleri karşılaştırmak istiyorsak, klasik mekaniğin doğru sorularını sormamız gerekir – bu, istatistiksel sorular anlamına gelir. Bunun üzerinde daha fazla açılmak için bir müddet duralım.

Klasik mekanikte hareket denklemlerinin her çözümü belirli bir enerjinin durumudur (enerjinin korunduğunu kabul ederek). Bir E enerji değerini sabitleyin. Kuantum kuramında sorduğumuz sorunun aynısını soralım : Verilen bir enerjide parçacığın çeşitli yerlerde bulunma olasılığı nedir? Bu soruya cevap vermek için klasik parçacığın $[x, x+dx]$ aralığında bulunma olasılığını, bu bölgede harcanan süreye orantılı olarak tanımlarız. (Oran sabiti olasılık dağılımını boylandırmak için kullanılır.) x noktasındaki bir salınıcı için dx kadar yerdeğiştirme dt süresinde gerçekleşir, burada (alıştırma)

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}}.$$

Buradan, x'in iki klasik dönüm noktası arasında olduğu anlaşılır, burada

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

*Taban durumunda, klasik hareket elbette ki aşikardır – (denge konumuna göre) konum ve momentum yok olur. Kuantum taban durumuunda, konum ve momentum, yok olan bu değerlerde merkezlenmiş Gaussiyen olasılık dağılımlarına sahiptir. Makroskobik m ve ω değerleri için bu dağılımların genişlikleri ihmal edilebilir.

Bu, klasik salınıcı için $P(x)$ olasılık yoğunluğunu, sabit bir normalizasyon faktörüne kadar, tanımlar :

$$P(x) = (sabit)\frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}}$$

(Olasılık yoğunluğu dönüm noktaları dışında yok olur.) $E \neq 0$ için, oluşan olasılık yoğunluğu hareketin dönüm noktaları yakınlarında kuvvetli tepeleşen ve denge konumu civarında düz ve göreceli olarak küçüktür. Bu, şu gerçeği yansıtır ki, salınıcı dönüm noktaları yakınında yavaş ve denge konumunda hızlı hareket ettiği için, parçacığı dönüm noktaları etrafında bulmak daha fazla olasıdır. Genel olarak, kuantum salınıcının bu klasik olasılık dağılımına benzer hiçbir tarafı yoktur. Herşeyden önce, Hermite polinomlarından dolayı anlaşılması zor olan bir şekilde salınır. Ayrıyetten, olasılık yoğunluğu dönüm noktaları dışında üstel biçimde sönümlü olduğu halde olasılık dağılımı orada tamamen sıfır değildir. Bununla birlikte, kuantum olasılık dağılımının "büyük enerji" limitinde klasik dağılıma *gerçekten* yaklaştığı gösterilebilir. Burada "büyük" yeterince "makroskobik" manasındadır, yani $E_n >> \hbar\omega$ öyle ki $n >> 1$. Bunu görmek adına basitçe büyük bir n için $|u_n|^2$ hesaplanır. Sonuç çok hızlı bir şekilde salınan dalga fonksiyonudur; salınımlar ortalama bir eğri etrafında olur, ki bu eğri, n daha da büyüdükçe klasik olasılık dağılımına yaklaşır. Herhangi sonlu bir x aralığında, yeterince büyük bir n, parçacığın bu aralıkta bulunma olasılığını klasik öngörü ile istenen hassaslıkta uyuşacak şekilde sonuçlandıracaktır. Bunu çabucak görmek için, favori matematik bilgisayar programınızdan grafikleri çizmesini isteyin!

Kuantum mekaniği tarafından tahmin edilen konuma ait olasılık dağılımının, klasik *istatistiksel mekanik* tarafından tahmin edilene "büyük kuantum sayıları" limitinde yaklaştığını gördük. Bu sonuç tatmin edicidir, fakat salınıcının klasik ve kuantum özellikleri arasındaki ilişkiye ait hikayenin bütününden çok uzaktır. Klasik salınıcıyı çok daha iyi modellemenin bir yolu, durağan durumların yerine minimum belirsizlikli "koherent durumlar" kullanmaktır (2. bölümün sonundaki problemlere bakın). Uyarılmış durumların, konum ve momentum için minimum belirsizlikli durumlar olmadığını hatırlayın. Koherent durumlar, minimum belirsizlikli durumlardır; makroskobik kütle ve frekansta, salınıcı, enerji, konum ve momentumda yeterince küçük bir belirsizliğe ve bir klasik salınıcıyı modellemeye elverişli bir zaman bağımlılığına sahip olur. Özellikle, koherent durumlar (taban durumu dışında) durağan olmadığından, konum ve momentum olasılık dağılımları klasik karşılıklarını – sinüzoidal salınımları – çağrıştırır. Biz, burada, koherent durumları araştırmayacağız. Salınıcının taban durumunun böyle bir durum olduğuna dikkat çekiyoruz. Makroskobik m ve ω değerleri için taban durumunun Gaussiyen konum olasılık dağılımının – $x_0 = \frac{\hbar}{m\omega}$ ile kontrol edilen – genişliği makroskopik uzunluk ölçeklerine göre gerçekten ihmal edilebilirdir. Dolayısıyla, en azından bu durumda klasik davranışın yeniden kazanıldığını görebilirsiniz.

Salınıcı dinamiği

Salınıcının salınımlı davranışını kuantum mekaniğinde açıkça görmek için durağan olmayan durumlar, yani enerji özvektörlerinin üstüste bindiği başlangıç durum, kullanmak gerekir. Bu özelliği Heisenberg resmini kullanarak inceleyelim. Ana iş, temel gözlenebilirleri t anında, sabit bir başlangıç zamanı, mesela $t_0 = 0$, temsilcileri cinsinden elde etmektir. Elimizde

$$X(0) \equiv X, \qquad P(0) \equiv P$$

var. $X(t)$ ve $P(t)$'yi hesaplamaya ihtiyacımız var. Bunu doğrudan

$$X(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}X(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}, \qquad P(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}P(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

kullanarak yapabiliriz, ve

$$H = H(t) = \frac{P^2(t)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2(t) = H(0) = \frac{P^2(0)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2(0).$$

$X(t)$ ve $P(t)$'yi hesaplamak için üstelleri kuvvet serisine açabilirsiniz, ve genel terimi irdeleyerek, sonucun kapalı formda bir ifadesini çıkarmaya çalışabilirsiniz. Benzerlik dönüşümüyle oynamak için başka numaralar da var. Bununla beraber, $X(t)$ ve $P(t)$ için ifadeler etmenin biraz daha kolay yolu doğrudan Heisenberg denklemlerini çözmektir.

$$[X(t), P(t)] = i\hbar I$$

kullanarak (alıştırma)

$$i\hbar\frac{d}{dt}X(t) = [X(t), H] = i\hbar\frac{P(t)}{m}$$
$$i\hbar\frac{d}{dt}P(t) = [P(t), H] = -i\hbar m\omega^2 X(t)$$

elde ederiz. Böylece, Heisenberg denklemleri

$$\frac{d}{dt}X(t) = [X(t), H] = \frac{P(t)}{m}, \qquad \frac{d}{dt}P(t) = [P(t), H] = -m\omega^2 X(t)$$

biçiminde yazılabilir. Bunlar matematiksel olarak klasik Hamilton hareket denklemleri ile aynıdır ve kolayca çözülebilir. Başlangıç koşullarını $t = 0$'da hesaba katarak

$$X(t) = (\cos\omega t)X(0) + (\frac{1}{m\omega}\sin\omega t)P(0),$$
$$P(t) = (\cos\omega t)P(0) - (m\omega\sin\omega t)X(0),$$

elde ederiz.

Heisenberg resminde, fiziksel tahminlerdeki (yani, olasılık dağılımlarındaki) zaman bağımlılığı bu gözlenebilirler ve bir sabit durum vektörü kullanılarak elde edilir. Bir örnek olarak, konum ve momentumun istatistiksel ortalamasını t zamanında hesaplayalım. Bu Heisenberg işlemcilerinin köşegen matris elemanlarını

$$\langle X\rangle(t) = (\cos\omega t)\langle X\rangle(0) + (\frac{1}{m\omega}\sin\omega t)\langle P\rangle(0),$$
$$\langle P\rangle(t) = (\cos\omega t)\langle P\rangle(0) - (m\omega\sin\omega t)\langle X\rangle(0),$$

elde ederiz. Yukarıdaki denklemlerden, kütlesi m ve frakansı ω olan harmonik salınıcıdan beklenen olağan davranışı bulduğumuzu görebilirsiniz. Gerçekten de, beklenen değerlerin, Ehrenfest teoremine uygun şekilde, tam olarak klasik konum ve momentum gibi davrandığını görüyoruz.

Şüphesiz ki, eğer sistem $|n\rangle$ durağan durumunda ise beklenen değerler zamanla değişmez. Bu, yukarıda gösterdiğimiz sonuçların ışığı altında paradoksal görünüyor. Yukarıdaki örnekteki bu paradoxun çözümü, durağan durumlarda başlangıç beklenen değerlerinin yok olmasıdır, yani,

$$\langle X\rangle(t) = \langle X\rangle(0) = 0, \qquad \langle P\rangle(t) = \langle P\rangle(0) = 0.$$

Bir alıştırma olarak duruğan durumda beklenen değerlerin, mesela X^2, nasıl zamandan bağımsız olabildiğini görmeye çalışın.