Ders 16

Metindeki ilgili bölümler §2.2, 2.3

Ehrenfest teoremi

Heisenberg denklemleri, klasik mekanikteki Hamilton denklemleri ile formal bir bağlantı kurduğu için çekicidir. Klasik mekanikte faz uzayında fonksiyonlar gözlenebilirleri temsil eder, ve A gözlenebilirinin zamansal değişim oranı Hamilton işlemcisi ile Poisson parantezi tarafından kontrol edilir :

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

Bunun kuantum mekaniğindeki formal karşılığı

$$\{A, B\} \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{1}{i\hbar}[A, B]$$

yoluyla elde edilir. Burada gözlenebilirler solda faz uzayında fonksiyonlar tarafından, sağda ise işlemciler tarafından temsil ediliyor. Bu formal eşleşme beklenen değerlerin, uygun bir yaklaşıklık içinde, klasik yolu takip edeceğini işaret eder. Bu sonuç *Ehrenfest teoremi* olarak bilinir.

Bu teoremi Heisenberg resminde türetmek çok kolaydır. Newton'un ikinci yasasının kuantum formunun beklenen değerini alın,

$$\frac{d^2X^i(t)}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}(\mathbf{X}(t))$$

ve durum vektörünün zamandan bağımsızlığını

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\mathbf{X}\rangle(t) = \langle\mathbf{F}\rangle(t)$$

elde etmek için kullanın (alıştırma), burada $\mathbf{F}$ kuvvettir. Bu sonuç Ehrenfest teoremidir.

Alıştırma : Schrödinger resminde bu sonucu nasıl türetirdiniz?

Ehrenfest teoreminin, beklenen değerlerin klasik dinamiğin yasalarına uyduğunu gösterdiği çok sık söylenir. Bu slogan o kadar da doğru değildir. Özellikle, konumun beklenen değerinin Newton'un ikinci yasasına mecburen uyması gerek*mez*. Beklenen değerler için Newton'un ikinci yasasının doğru bir şekli

$$m\frac{d^2\langle X^i\rangle(t)}{dt^2} = -\frac{\partial V(\langle\vec{X}\rangle(t))}{d\langle X^i\rangle}$$

olur. Şüphesiz ki, kuantum mekaniği, genelde, bu son denklemi ver*mez*. Bu son sonucu elde etmek için

$$\langle\frac{\partial V(\vec{X}(t))}{\partial X^i}\rangle = \frac{\partial V(\langle\vec{X}(t)\rangle(t))}{\partial\langle X^i\rangle}$$

eşitliğine ihtiyacımız var, ki bunun geçerliliği kullanılan durum vektörüne olduğu kadar potansiyel enerji işlemcisinin formuna da bağlıdır. Bir boyutta harmonik salınıcı potansiyeli (daha detaylıca aşağıda incelenecek) bu eşitliğin sağlan*dığı* basit bir örnektir, ki burada

$$V(X) = \frac{1}{2}kX^2$$

bundan dolayı

$$\frac{\partial V(X(t))}{\partial X} = kX$$

ki bu herhangi durum vektörü için

$$\langle kX\rangle(t) = \frac{\partial V(\langle X\rangle)(t))}{\partial\langle X\rangle} = k\langle X\rangle(t)$$

eşitliğini sağlar.

Harmonik salınıcı örneği istisnadır. Genellikle, Ehrenfest teoremi beklenen değerlerin klasik hareket denklemlerine uyduğuna işaret *etmez*. Örneğin,

$$V(X) = \frac{1}{3}kX^3$$

potansiyelini düşünün. Bu halde,

$$\frac{\partial V(\langle X\rangle(t))}{\partial\langle X\rangle} = k\langle X\rangle^2(t)$$

elde ederiz, ki bu genel olarak

$$\langle\frac{\partial V(X(t))}{\partial X}\rangle = k\langle X^2\rangle(t)$$

ifadesine eşit değildir. Gerçekten de, bu iki ifade ancak ve ancak $X(t)$'nin dağılması sıfır olursa – ki doğrusunu söylemek gerekirse asla olmaz – birbirine uyar. (Bununla beraber, momentumda büyük bir dağılma pahasına konumdaki dağılmayı istendiği kadar küçük yapan durumlar bulunabilir.) Buradan hareketle, Ehrenfest teoremine göre, bu kübik potansiyel için konumun beklenen değerleri klasik davranışa, sadece seçilen durumda (tüm zamanlar için) konumdaki dağılma ihmal edilebilir olduğu oranda uyar. Bu sonuç genel bir kural tanımlar : parçacığın hareketine ait klasik davranış temel gözlenebilirlerdeki istatistiksel belirsizlikler yeterince küçük olduğunda ortaya çıkar.

Harmonik Salınıcı : Tanımlar, Hamilton işlemcisi

Şimdi, kuantum mekaniğinin yükünü çeken modellerinden birinin önemli özelliklerini gözden geçirmeye başlıyoruz : basit harmonik salınıcı (BHS). Bu model kullanışlıdır, çünkü analitik olarak kolay takip edilebilir, kuantum mekaniğinin çok çeşitli özelliklerini hem fiziksel hem de bizzat formalizm seviyesinde gösterir, ve kararlı denge etrafında gerçek fiziksel sistemlerin bir çok basit modeline iyi bir başlangıç yaklaşıklığı sağlar. Fizikte harmonik salınıcı fikrinin bu kadar sık ortaya çıkması dikkate değerdir. Örneğin, harmonik salınıcı "bağlı durum davranışı"nın jenerik özelliklerini gösterir, kuarkların nükleonlarda hapsedilmesini modellemek için kullanılır, "serbest kuantum alanı"nın temel yapıtaşıdır. Fotonları anlamak için harmonik salınıcı kullanılabilir!

BHS matematiksel açıdan, ikinci mertebeden bir potansiyelin tesiri altında bir boyutta hareket eden bir parçacık olarak görülebilir (fiziksel olarak genellikle bu şekilde ortaya çıkmamasına rağmen). Bir miktar detaya girerek halehazırda tanımladığımız konum, X ve momentum, P'dir (Heisenberg resminde bunlar başlangıç anındaki konum ve momentum işlemcileridir). Dinamik, Hamilton işlemcisi tarafından üretilir (hem Schrödinger hem de Heisenberg resminde).

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$$

Klasik olarak, bu bir dinamik "yaya bağlı kütle" sisteminin enerji fonksiyonu olacaktır, burada m kütle ve ω Hooke yasasına göre yayın doğal salınım frekansıdır. Bu terminolojiyi burada da koruyacağız.

Konum ve momentum gözlenebilirlerini biraz ayrıntılı çalıştık. Bu bir boyutlu basit sistem için Hamilton işlemcisi ilgi odağıdır. Kuşkusuz ki, onun spektrumunu ve özvektörlerini anlamayı isteriz, çünkü bunlar enerjinin istatistiksel kesinlikle bilindiği durumları ve olası enerjileri nitelendirir. Üstelik, H'ın tayfsal özellikleri salınıcının Schrödinger resminde dinamik gelişimini belirleyecektir. H, X ve P'nin cebirsel (sıradeğişim) özellikleri Heisenberg resminde dinamiği kontrol eder. Aslında, göreceğiniz gibi, H, X ve P işlemcilerinin cebirsel özellikleri esasen bilmek istediğimiz herşeyi bize söyler.

BHS Hamilton işlemcisinin spektrumu

H'ı analiz etmek için Dirac tarafından öncülük edilmiş (olduğuna inandığım) zarif bir cebirsel yol takip edeceğiz. Doğrudan konum ve momentum işlemcileri ile çalışmaktan ziyade, daha uygun bir işlemci kümesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X + \frac{i}{m\omega}P\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(X - \frac{i}{m\omega}P\right),$$

olarak belirleyin ki (alıştırma)

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \qquad P = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a - a^\dagger).$$

a ve $a^\dagger$, klasik salınıcının hareket denklemlerinin genel çözümünde çıkan kompleks genliklerin kuantum uyarlaması olarak görülebilir (alıştırma). Sonra bundan bir miktar daha bahsedeceğiz.

Konum ve momentuma ait KSB'den,

$$[a, a^\dagger] = I$$

elde ederiz. Doğrudan hesaplama

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega(aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}I)$$

verir (alıştırma). Açıkça, Hamilton işlemcisi'in esas anlamı "sayı işlemcisi"nde bulunmaktadır

$$N := a^\dagger a.$$

Bu işlemci kendine eşleniktir ve şimdilik özvektörlerini $|\lambda\rangle$ ile belirtiyoruz,

$$N|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

bundan dolayı enerji özvektörleri $|\lambda\rangle$ olur ve,

$$H|\lambda\rangle = E_\lambda|\lambda\rangle, \qquad E_\lambda = (\lambda + \frac{1}{2})\hbar\omega.$$

Dikkat ederseniz $|\lambda\rangle$ özdeğerleri boyutsuzdur (alıştırma).

Aşağıdaki sıradeğişimleri

$$[N, a] = -a, \qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger$$

kontrol etmek zor değildir. * Bu da,

$$N(a^\dagger|\lambda\rangle) = (\lambda + 1)(a^\dagger|\lambda\rangle)$$

ve

$$N(a|\lambda\rangle) = (\lambda - 1)(a|\lambda\rangle)$$

ifadelerine işaret eder (alıştırma).

Bundan dolayı, $a^\dagger$ (a), N'in bir özvektörünü alıp özdeğeri bir birim yükseltilmiş (alçaltılmış) bir özvektöre dönüştürür. Buna bağlı olarak, $a^\dagger$ (a)'nın bir enerji özvektörü üzerine etkimesi enerjisi bir "kuantum", $\hbar\omega$, kadar yükselmiş (alçalmış) bir özvektör meydana getirir. Bu nedenle, $a^\dagger$ ve a çoğunlukla "yaratma ve yok etme işlemcileri", veya "merdiven işlemcileri" veya "yükseltme ve alçaltma işlemcileri" olarak adlandırılır. Dolayısıyla, eğer N (veya H)'ın bir tek özvektörü bilinirse, birbirinden tamsayılarla (veya $\hbar\omega$'nın tam katları) ayrılan özdeğerli böyle özvektörlerden sonsuz tane elde ederiz. Bu sonuç sadece konum ve momentumun (veya a ve $a^\dagger$) sıradeğişimi bağıntısından kaynaklanır.

Devam edecek...

---

*Bunu kontrol etmenin bir yolu

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

özelliğini, ki alıştırma olarak ispatlamalısınız, kullanmaktır.