Ders 15

Metindeki ilgili bölümler §2.2

Heisenberg resminde uyuşumlu/uyuşumsuz gözlenebilirler

Heisenberg resmine geçerken uyuşumlu/uyuşumsuz gözlenebilirler kavramının bozulmadan kaldığını da not edelim. Bu, sıradeğişimin

$$[A(t), B(t)] = [U^\dagger AU, U^\dagger BU] = U^\dagger [A, B]U$$

şeklinde dönüşmesindendir (alıştırma). (Birbirine üniter/benzerlik dönüşümü ile bağlı herhangi iki işlemcinin bu sıradeğişim özelliğine sahip olacağını dikkate alın.) Bundan dolayı, eğer **A** ve **B** Schrödinger resminde uyuşumlu(/suz) ise Heisenberg resminde de (herbir anda) uyuşumlu(/suz) olacaktır. Ayrica Schrödinger resminde iki gözlenebilirin sıradeğişimi – i kere bir başka gözlenebilir – Heisenberg resmine, aynen herhangi bir Schrödinger gözlenebiliri gibi, yani, üniter dönüşümle, geçiş yapar.

$$A \longrightarrow U^\dagger AU$$

Genel olarak üniter dönüşümler

Tartışmamız zamanla gelişim bağlamında ifade edilmiş olsa bile, bu aynı mantığın herhangi bir üniter dönüşüme uygulanabileceğini not edin. Örneğin, bir boyutta hareket eden bir parçacık için ötelemelerin etkisini, ya, işlemci-gözlenebilirleri değişmez olarak bırakıp durum vektörünü tekrar tanımlayarak :

$$|\psi\rangle \longrightarrow T_a|\psi\rangle, \qquad A \longrightarrow A$$

ya da, eşit bir biçimde, durum vektörleri değişmez olarak bırakıp gözlenebilirleri tekrar tanımlayarak :

$$A \longrightarrow T_a^\dagger A T_a, \qquad |\psi\rangle \longrightarrow |\psi\rangle$$

bu iki şekilde görülebilir. Özellikle, konum ve momentum işlemcilerinin öteleme altında beklendiği şekilde değiştiğini dikkate alın (alıştırma – ev ödevinde bu şeyle oynadınız) :

$$T_a^\dagger X T_a = x + a, \qquad T_a^\dagger P T_a = p$$

Heisenberg denklemleri

Bilinen Schrödinger denkleminin gerçekten, sadece zamanla gelişim ve onun sonsuz küçük üreteci arasındaki bağıntının Schrödinger resmi çerçevesinde bir sonucu olduğunu gördük :

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)$$

Bir Hamilton işlemcisi verildiğinde, bu denklem, Schrödinger resminde kuantum dinamiğini incelemek için başlangıç noktasıdır. Artık şimdi sorabiliriz : Bunun Heisenberg resmindeki benzeşiği nedir? Heisenberg resminde, dinamik evrilme, Schrödinger resminde kolaylık olması için zamandan bağımsız olduğunu kabul ettiğimiz, işlemci-gözlenebilirler vasıtasıyla gerçekleşir. Elimizde

$$A(t) = U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0)$$

var. İki tarafın türevini alarak ve $U(t, t_0)$'a ait temel differansiyel denklemimizi kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A(t) &= -\frac{1}{i\hbar}U^\dagger(t,t_0)H(t)AU(t,t_0) + U^\dagger(t,t_0)A\frac{1}{i\hbar}H(t)U(t,t_0) \\
&= -\frac{1}{i\hbar}U^\dagger(t,t_0)H(t)U(t,t_0)U^\dagger(t,t_0)AU(t,t_0) + \frac{1}{i\hbar}U^\dagger(t,t_0)AU(t,t_0)U^\dagger(t,t_0)H(t)U(t,t_0) \\
&= \frac{1}{i\hbar}[A(t), H_{Heis}(t)]
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada, Hamilton işlemcisi'in Heisenberg resmi biçimini işin içine kattık :

$$H_{Heis}(t) = U^\dagger(t, t_0)H(t)U(t, t_0).$$

Eğer (Schrödinger) Hamilton işlemcisi, sıklıkla olduğu üzere, zamandan bağımsız ise, aşağıdaki ifadeleri elde ederiz (alıştırma).

$$H_{Heis}(t) = H(t) = H, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Bu akılda tutmak için oldukça önemlidir.

Şu denklem,

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H_{Heis}(t)]$$

$A(t)$ Heisenberg işlemcisi için *Heisenberg hareket denklemi*dir. Bir Hamilton işlemcisi verildiğinde bir gözlenebilirin t anındaki Heisenberg işlemcisi karşılığını bulmak için

$$A(t_0) = A$$

başlangıç koşulları ile, prensip olarak, çözülebilen bir diferansiyel denklemdir. $A(t)$ verildiğinde, olasılık dağılımlarının zamana bağımlılığı herzamanki yolla elde edilebilir. (Bir t anında) $A(t)$ ile temsil edilen gözlenebilirin ölçümüne ait çıktı a_i özdeğerlerinden biridir. Bir t anında (dejenerelik olmadığını kabul ederek) a_i bulma olasılığı

$$P(a_i, t) = |\langle a_i, t|\psi, t_0\rangle|^2 = |\langle a_i, t_0|U(t, t_0)|\psi, t_0\rangle|^2,$$

burada $|a_i, t\rangle$, $A(t)$'nin a_i özdeğerine sahip özvektörüdür ve $|\psi, t_o\rangle$ de sistem için durum vektörüdür.

Heisenberg denklemi Schrödinger resminden gelen belirli sonuçları oldukça şeffaf hale getirebilir. Örneğin, denklemin her iki tarafının sadece beklenen değeri (tek, zamandan bağımsız) durum vektörünü kullanarak alındığında

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle$$

olduğu çok açıktır (alıştırma). Burada $[A, H]$ temsilinin, her iki resimde de iyi tanımlı olan, bu sıradeğişimine, karşılık gelen gözlenebilir anlamına geldiğini not edin. Benzer şekilde, (kolaylık açısından $H_{Heis} = H$ olacak şekilde zamandan bağımsız kabul edilen) Hamilton işlemcisi ile sıradeğişmeli olan işlemcilerin *hareketin sabitleri* olduğunu görmek kolaydır :

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{1}{i\hbar}[A(t), H] = U^\dagger[A(t_0), H]U = 0$$

Bundan dolayı, korunan büyüklükler

$$A(t) = A(t_0) = A$$

eşitliğini sağlar. Bu sonucu doğrudan da görebilirsiniz. Eğer bir gözlenebilir bir anda, diyelimki $t = t_0$, H ile sıradeğişmeli ise

$$A(t) = U^\dagger(t, t_0)A(t_0)U(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0)A(t_0) = A(t_0)$$

olduğundan zaman içinde değişmez. Açıkça, korunan bir büyüklük zamandan bağımsız bir olasılık yoğunluğuna sahiptir çünkü bu işlemci Heisenberg resminde zamanla değişmez.

Gözlenebilirlerin fonksiyonları

Zaman gelişimi işlemcisinin Heisenberg işlemcilerini t zamanında, bir benzerlik dönüşümü, yoluyla tanımladığını gördük :

$$A(t) = U^\dagger AU.$$

Eğer A'nın fonksiyonu olan bir gözlenebilirimiz varsa, diyelimki $F(A)$; elbette,

$$F(A)(t) = U^\dagger F(A)U$$

elde ederiz. Bunun

$$F(A)(t) = F(A(t)) \equiv F(U^\dagger AU)$$

şeklinde de ifade edilebileceğini not etmek önemlidir. Bunu görmek için, tayfsal ayrışımı kullanırız :

$$F(A) = \sum_a F(a)|a\rangle\langle a|$$

öyle ki

$$U^\dagger F(A)U = \sum_a F(a)U^\dagger|a\rangle\langle a|U = \sum_a F(a)|a(t)\rangle\langle a(t)| = F(A(t)).$$

Bir potansiyel içindeki bir parçacığın Heisenberg resminde dinamiği

Konumu $\mathbf{X}$ (bir anda, mesela $t = 0$) ve momentumu $\mathbf{P}$ (bunlar işlemcilerden yapılmış uzaysal vektörlerdir – orijinal temsilimize geri dönüyoruz) olan bir parçacık için

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{X})$$

formunda bir Hamilton işlemcisi düşünüyoruz. Bu işlemcinin zamana bağlı olmadığına dikkat edin, bundan dolayı o hem Schrödinger hem de Heisenberg Hamilton işlemcisi'idir. Özellikle,

$$H(t) = H(0) = H = \frac{P(t)^2}{2m} + V(\mathbf{X}(t))$$

elde ederiz. Bu sonuç Heisenberg resminde enerjinin korunumunun matematiksel bir biçimi olarak görülebilir.

Haydi, $\mathbf{X}(t)$ konumu ve $\mathbf{P}(t)$ momentumu için Heisenberg denklemlerini hesaplayalım. Belli ki, bunu yapmak için konum ve momentumun Hamilton işlemcisi ile sıradeğişimlerine ihtiyacımız olacak. Başlamak için, Heisenberg resminde sabit bir anda kanonik sıradeğişimi bağıntılarını (KSB) düşünelim. Genel

$$[A(t), B(t)] = U^\dagger(t, t_0)[A(t_0), B(t_0)]U(t, t_0)$$

özelliğini kullanarak

$$[X^i(t), X^j(t)] = 0 = [P_i(t), P_j(t)], \qquad [X^i(t), P_j(t)] = i\hbar\delta^i_j I$$

elde ederiz (alıştırma). Başka bir deyişle, Heisenberg konum ve momentum işlemcileri herhangi bir sabit anda KSB'ye uyar. Bu, konum ve momentum arasındaki belirsizlik ilkesinin zamandan bağımsız – Schrödinger resminde de ispatlayabileceğiniz bir gerçek – olduğu anlamına gelir.

Şimdi, doğrudan

$$[X^i(t), H] = \frac{i\hbar}{m}P^i(t)$$

olduğu hesaplanabilir, öyle ki

$$\frac{dX^i(t)}{dt} = \frac{1}{m}P^i(t)$$

Böylece, parçacığın hızı ve momentumu birbirine bağlanır; bu sonucun Schrödinger resminde oluşturulması biraz daha dikkat gerektirir. Momentuma ait Heisenberg denklemlerini hesaplamak için

$$[P_i(t), H] = [P_i(t), V(\mathbf{X}(t))]$$

sıradeğişimlerini hesaplamamız gerekir (alıştırma). Bunu yapmak için herhalde en kolay yol

$$[P_i(t), V(\mathbf{X}(t)] = U^\dagger(t, 0)[P_i, V(\mathbf{X})]U(t, 0) = -i\hbar U^\dagger(t, 0)\frac{\partial V}{\partial x^i}(\mathbf{X})U(t, 0) = -i\hbar\frac{\partial V}{\partial x^i}(\mathbf{X}(t))$$

ifadesini kullanmaktır. Burada

$$[P_i, V(\mathbf{X})] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x^i}(\mathbf{X})$$

kullandık, ki bu, sonsuz küçük ötelemelerin üreteci olarak P_i'nin tanımını konum özvektörleri bazı üzerinde kullanmak suretiyle kontrol edilerek doğrulanabilir (iyi alıştırma). Hepsini bir araya getirerek

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}(\mathbf{X(t)})$$

elde ederiz. $\mathbf{X}(t)$ için Heisenberg denklemlerini kullanarak, $\mathbf{P}(t)$ için Heisenberg denklemini

$$\frac{d^2 X^i(t)}{dt^2} = F^i(\mathbf{X}(t))$$

olarak yazabiliriz, burada

$$F^i(\mathbf{X}(t)) = -\frac{\partial V}{\partial x^i}(\mathbf{X}(t))$$

kuvvetin Heisenberg resminde t anında kuantum temsili olarak görülebilir. Bu Newton'un ikinci yasasının kuantum karşılığıdır.

Bu sonuçtan, bir kuantum parçacığın aslına bakılırsa tıpkı bir klasik parçacık gibi davrandığına inanmak çok çekicidir. Herşeyden önce, temel gözlenebilirler her iki kuramda da aynı hareket denklemlerine uyuyorlar. Kuşkusuz ki, sırf konum ve momentumun kuantum teorisinde istatistiksel kesinlikle bilinmesinin mümkün olmaması nedeniyle bu doğru değildir. Bu mevzuya bir sonraki bölümde daha yakından bakacağız.

Elementer bir örnek olarak, 1-d'de bir serbest parçacık, $V = 0$, düşünelim. Heisenberg denklemleri

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{P(t)}{m}, \qquad \frac{dP(t)}{dt} = 0$$

ve çözümleri ($t_0 = 0$ seçerek)

$$X(t) = X(0) + \frac{P(0)}{m}t, \qquad P(t) = P(0).$$

Burada $X(0) = X$ ve $P(0) = P$, daha önce Schrödinger resminde ele aldığımız işlemcilerdir. Momentum açıkça bir hareket sabitidir : bir serbest parçacık için momentum olasılık dağılımı zamandan bağımsızdır. Konum olasılık dağılımı zaman içinde değişir, yani,

$$\langle X\rangle(t) = \langle X\rangle(0) + \frac{1}{m}\langle P\rangle(0).$$