Ders 14

Metindeki ilgili bölümler §2.1, 2.2

Zaman-Enerji Belirsizlik İlkesi (Devam)

Kolaylık açısından enerjinin, E_k değerleriyle ve $|k\rangle$ özvektörleri ile kesikli olduğunu farz edin. Herhangi bir durum

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$$

şeklinde yazılabilir. Bunun, $t = t_0$ anında başlangıç durumu olduğu kabul edilerek, t anındaki durum

$$U(t, t_0)|\psi\rangle = \sum_k c_k e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)} |E_k\rangle$$

ile verilir. Sistemin zaman içindeki değişimini nitelendirmek için bir A gözlenebiliri kullanalım (ki herşeyden önce, aslında yapmak istediğimiz de budur). A (veya H)'ın $|\psi\rangle$ başlangıç durumundaki standart sapmasını ΔA (veya ΔE) ile gösterelim. Başlangıç durumunda belirsizlik bağıntısından

$$\Delta A \Delta E \geq \frac{1}{2}|\langle [A, H]\rangle|$$

elde ederiz. Beklenen değerlerin zamanla gelişimini sıradeğişimlere bağlayan daha önceki sonucumuzu hatırlayın. Elimizde

$$\frac{1}{2}\langle [A, H]\rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{d}{dt}\langle A\rangle$$

var. Bundan dolayı :

$$\Delta A \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}|\frac{d}{dt}\langle A\rangle|.$$

Eğer sistemdeki anlamlı bir değişime ait Δ zaman ölçeğini nitelendirmek için A'yı kullanacaksak, bunu A'nın ortalama değerinin değişim oranını A'daki başlangıç belirsizliğine kıyaslayarak yapabiliriz :

$$\Delta t = \frac{\Delta A}{|\frac{d}{dt}\langle A\rangle|}$$

Bu şekilde tanımlanmış Δt *ile* dolayısıyla

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

elde ederiz. Böylece, sistemdeki anlamlı bir değişimi niteleyen en kısa zaman ölçeği

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar$$

ile verilir. Elbette, eğer (başlangıç) durumu durağan ise – yani, bir enerji özvektörü ise, $\Delta E = 0$ olur ve $\Delta t \longrightarrow 0$ olmaya zorlar, ki bu durumun fiziksel nicelikleri hiçbir zaman değişmediği için mantıklıdır.

Bu nedenle zaman-enerji belirsizlik ilkesi, enerjideki istatistiksel belirsizliğin (ki bu, enerjinin olasılık dağılımı zamanla değişmediği için, zaman içinde değişmez) sistemdeki değişime ait zaman ölçeğini nasıl kumanda ettiğine dair bir ifadedir. Bir takım özel koşullarda zaman-enerji belirsizlik ilkesinin bu esas anlamı başka şekillerde yorumlanabilir, fakat bunlar bizim burada verdiğimiz kadar genel değildir. Gerçekten de zaman-enerji belirsizlik ilkesinin alternatif yorumları bu "özel koşullar" dışında saçma bir hal alabilir. Burada konuştuklarım "Yeterince kısa bir zaman için yapabilirsen enerji korunumunu ihlal edebilirsin" veya "Enerjinin belirsizliği zamanın belirsizliği ile ilişkilidir" gibi sık duyulan şeylerdir. Kulağa acayip gelen bu ifadelere tekrar geri geleceğiz ve bunların gerçekten ne anlama geldiğini biraz sonra göreceğiz. Şimdilik, böyle sloganlardan sakının.

Zaman-enerji belirsizlik ilkesine hoş bir örnek olarak, son çalıştığımız spin presesyonu problemini düşünün. Elimizde z-ekseni yönünde düzgün, statik bir $\mathbf{B} = B\hat{k}$ manyetik alanı olduğunu hatırlayın. Hamilton işlemcisi,

$$H = \frac{eB}{mc} S_z.$$

Başlangıç durumu S_x'nin bir özvektörü olduğunda spin gözlenebilirlerinin zamana bağımlılığını çalışmıştık. Başlangıç durumu $|S_x, +\rangle$ için enerjinin standart sapmasını hesaplamak zor olmasa gerek.

$$H^2 = \left(\frac{eB\hbar}{2mc}\right)^2 I,$$

kullanarak

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2}\frac{eB}{mc} = \frac{1}{2}\hbar\omega,$$

elde ederiz (alıştırma), öyle ki durumda anlamlı bir değişimi

$$\frac{1}{2}\omega\Delta t \sim 1$$

iken bekleriz. Buna göre ω frekansı, örneğin

$$Prob(S_x = \pm\frac{\hbar}{2})(t) = \begin{cases} \cos^2(\frac{\omega}{2}t) \\ \sin^2(\frac{\omega}{2}t) \end{cases}$$

olasılık dağılımlarından zaten tespit etmiş olabileceğiniz gibi, sistemdeki değişimlerin zaman ölçeğini kontrol eder.

Heisenberg Resmi

Şimdi, zaman gelişimini durum vektörlerinden ziyade gözlenebilirlerin temsilcileri olan işlemcilerin içine kodladığımız, Heisenberg resmini kullanarak dinamiği nasıl tarif edeceğimizi görelim. Buradaki fikir, zamanla gelişimin, fiziksel gözlenebilirler ve kendine eşlenik işlemciler arasındaki uygunluğun zaman içinde değişmesine izin verilmesi yoluyla matematiksel olarak modellenmesidir. Az önce Schrödinger resmindeki işlerimiz göz önüne alındığında, bunun nasıl çalıştığını görmek dolambaçsızca dosdoğrudur.

Çok açık bir temsil kullanmakta fayda var. Fiziksel gözlenebiliri **A** ile gösteriyoruz. Bunun zamana bağlı, kendine eşlenik işlemci temsilcisini de A ile gösteriyoruz. Elimizde

$$\langle \mathbf{A} \rangle(t) = \langle \psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t_0)|U^\dagger(t,t_0)AU(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

var.* Eğer

$$A(t) = U^\dagger(t,t_0)AU(t,t_0)$$

şeklinde tanımlarsak, zaman gelişimini, matematiksel dille, kendine eşlenik bir $A(t)$ işlemcisinin **A** gözlenebilirine, zamana bağlı özdeşleşmesi vasıtasıyla gerçekleşiyor, olarak görebiliriz :

$$\langle \mathbf{A} \rangle(t) = \langle \psi(t_0)|A(t)|\psi(t_0)\rangle.$$

A'yı Schrödinger resmi işlemcisi/gözlenebiliri ve $A(t)$'yi de Heisenberg resmi işlemcisi/ gözlenebiliri olarak adlandırırız. **A**'nın Schrödinger ve Heisenberg temsilcilerinin $t = t_0$'da aynı olduğunu görebilirsiniz.

Heisenberg resminde sistemin durumunu temsil eden birim vektör sonuna kadar sabittir,

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$$

bu sırada işlemci-gözlenebilirler zaman içinde evrilir. Schrödinger resminde işlemci-gözlenebilirler sabit tutulurken durumlar zaman içinde evrilir.

Bildiğiniz gibi, kuantum mekaniğinin en temel tahminlerinden biri, **A**'nın ölçümüne ait olası sonuçların kümesinin, onun işlemci temsilcisinin spektrumu olmasıdır. Schrödinger resminde, bundan dolayı **A**'nın ölçümünün olası sonuçlarına ulaşmak için A'nın spektrumunu düşünürüz. Heisenberg resminde, açıkça, **A**'nın ölçümlerinin her zaman olası sonuçlarının ne olduğunu görmek için her bir anda farklı bir işlemci düşünmek zorundayız. Bu kötü görünüyor. Heisenberg resminde eğer **A**'yı temsil eden işlemci, prensip olarak, farklı zamanlarda farklı olabiliyorsa **A**'nın ölçümünün olası sonuçlarının – ki bu, Schrödinger resminde tüm zamanlar için sabit bir kümedir – farklı zamanlarda farklı olacağını söyleme tehlikesiyle karşı karşıyayız. Örneğin, bir parçacığın, *belki de* zamanın bir anında, üzerinde hareket etmek için gerçek hattın bütününe sahip olabilmişken başka bir anda bu gerçek hattın sadece bir alt kümesi üzerinde hareket edebilir olması mümkündür. Bu çok ciddi bir tutarsızlıktır. Şüphesiz ki, ortada hiçbir tutarsızlık

*Sadelik adına, dikkatimizi herzaman, tanımlarında açıktan t zamanını içermeyen **A** gözlenebilirlerine, kısıtlayacağız. Burada demek istediğim, "enerjinin zaman ile çarpımı" gibi gözlenebilirleri tartışmamızın dışında tutacağımızdır. Böyle gözlenebilirlere izin vermek kolaydır, ama ilk bakışta kafa karıştırıcı olabilir. Ders kitabınız "'açıktan zamana bağlı gözlenebilirler" durumunda sonuçlarımızın nasıl genelleneceğini gösteriyor.

yoktur. Eğer $|a_i\rangle$, A'nın özvektörleri

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$$

ise

$$|a_i(t)\rangle := U^\dagger(t,t_0)|a_i\rangle$$

$A(t)$'nin *aynı özdeğerli* özvektörleri olduğunu kolayca kontrol edebilirsiniz :

$$A|a_i(t)\rangle = a_i|a_i(t)\rangle.$$

Aslında, $A(t)$'nin spektrumunun, A'ın spektrumunun tıpkısı olduğunu ispatlamak zor değildir.* Bundan dolayı, **A**'nın ölçümünün olası sonuçları her iki resimde de aynıdır.

Bu iki resim arasında değişen *şey*, **A** gözlenebilirinin istatistiksel bir kesinlikle sabitlendiği durumların matematiksel temsilidir. Biliyorsunuz ki, **A**'nın kesinlikle bilindiği durumlar işlemci temsilcisinin özvektörleridir. Heisenberg resminde, bundan dolayı genellikle, her bir zaman farklı özvektör elde ederiz. Olasılık dağılımlarının olması gerektiği gibi zamanla gelişimini elde etmek için gereken tam da budur :

$$Prob(\mathbf{A} = a_i) = |\langle a_i(t)|\psi(t_0)\rangle|^2 = |\langle a_i|U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle|^2 = |\langle a_i|\psi(t)\rangle|^2$$

burada son ifade olasılık için Schrödinger resmi formülüdür.

Bu, zaman içinde değişen özvektörler sonucu, karışıklığa neden olabilir, bu sebeple bu noktayı bir miktar açayım. Heisenberg resminde durum vektörü tüm zamanlar için aynıdır, fakat bir gözlenebilirin özvektörleri(nin bazı) genellikle zaman içinde değişir. Sisteminizi $A(t_0)$'ın bir özvektöründe başlatırsanız, bu, **A** gözlenebiliri $t = t_0$ anında kesinlikle biliniyor anlamına gelir ve $|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle = |a(t_0)\rangle$ elde ederiz. Bir başka t anında durum vektörü hala $|a(t_0)\rangle$'dır, fakat bu, durum vektörü $|a(t_0)\rangle$ yerine $|a(t)\rangle$ olacağı için artık **A**'nın kesinlikle bilindiği bir durum değildir. Bazen bu vaziyet şu sloganla özetlenir : Schrödinger resminde (gözlenebilirden sağlanan) baz vektörleri sabitken durum vektörleri zamanla evrilir. Heisenberg resminde, durum vektörleri sabittir, fakat baz vektörleri zaman içinde (ters yönde) evrilir. Bu bir dönüşümün – burada zamanla gelişim – "aktif'e karşı pasif" temsilinin örneklerinden biridir.

*Bu, üniter $A \leftrightarrow U^\dagger A U$ dönüşümü ile birbirine bağlı herhangi iki işlemci için doğrudur.