Ders 13

Metindeki ilgili bölümler §2.1

Örnek : Düzgün bir manyetik alanda spin 1/2

Bir elektronik spinin (düzgün) bir manyetik alan içinde dinamik evrimini düşünelim. Eletkronun ötelemsel serbestlik derecelerini ihmal ediyoruz. Elektronun manyetik momenti

$$\mu = -\left(\frac{e}{mc}\right)\mathbf{S}$$

ile temsil ettiğimiz bir gözlenebilirdir. (Burada $e > 0$ elektronun elektrik yükünün büyüklüğüdür.) Bir $\mathbf{B}$ (düzgün,statik) manyetik alanı içindeki bir manyetik momentin Hamilton işlemcisi

$$H = -\mu \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{e}{mc}\right)\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$$

olarak alınır. Şimdi, z eksenini $\mathbf{B}$ yönünde

$$H = \left(\frac{eB}{mc}\right)S_z$$

olacak şekilde seçelim. Açıkça, S_z'nin özvektörleri enerji özvektörleridir. Bundan dolayı, S_z'nin özvektörleri durağan durumlardır.

Genel bir,

$$|\psi(t_0)\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

durumunun zamanla gelişimini düşünelim,

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{eB}{mc}S_z}|\psi(t_0)\rangle \\ &= ae^{-i\omega t/2}|+\rangle + be^{i\omega t/2}|-\rangle,\end{aligned}$$

elde ederiz, burada

$$\omega = \frac{eB}{mc}.$$

Bu formülden, başlangıç durumunun S_z'nin bir özvektörü olduğunda tüm sonraki zamanlar için öyle kalacağını kolayca görebilirsiniz. Dinamik evrimi görmek için, enerji özvektörü olmayan bir başlangıç durumu alalım. Örneğin, $t = 0$'da, $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, yani $|\psi(0)\rangle = |S_x, +\rangle$. Bir t anında $S_x = \pm\frac{\hbar}{2}$ elde etme olasılığı nedir?

$$Prob(S_x = \frac{\hbar}{2}) = |\langle S_x, +|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2(\frac{\omega t}{2})$$

$$Prob(S_x = -\frac{\hbar}{2}) = |\langle S_x, -|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(\frac{\omega t}{2})$$

elde ederiz (alıştırma). Bundan dolayı, manyetik alanın bir etkisi, spinin x-bileşenini periyodik olarak "tersyüz" etmeye sebep olmaktır. Spinin davranışı, zaman içinde beklenen değeri takip edilerek görselleştirilebilir. Yine $|\psi(0)\rangle = |S_x, +\rangle$ kullanarak

$$\langle S_x\rangle(t) = \langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\cos\omega t, \qquad \langle S_y\rangle(t) = \langle\psi(t)|S_y|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\omega t, \qquad \langle S_z\rangle(t) = 0$$

elde ederiz (iyi alıştırma). Böylece, ortalama olarak, spin vektörü manyetik alan tarafından belirlenen eksen etrafında ve buna dik olan düzlemde $\omega = \frac{eB}{mc}$ açısal hızıyla presesyon hareketi yapar.

Beklenen değerlerin zamanla değişim oranı

Beklenen değerlerin zaman içinde nasıl değiştiğini düşünelim. (işlemci temsili zamanla değişmez olacak şekilde, ilgilenilen gözlenebilirin zamana bağlı olmadığını kabul ederek)

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t) = \frac{d}{dt}\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle.$$

elde ederiz.

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H|\psi(t)\rangle, \qquad \frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H$$

kullanarak

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle[A,H]\rangle(t)$$

elde ederiz (alıştırma).

Bu nedenle, en azından ortalamada, bir gözlenebilirin dinamik evrimi onun H ile uyuşumsuzluğu tarafından kontrol edilir. Şüphesiz, eğer A ve H uyuşumlu ise, bunlar ortak bir özvektör bazı alırlar ki bu yüzden A'nın olasılık dağılımı H'ınki ile aynı sebepten dolayı zamandan bağımsızdır (aşağıya bakın). Bir alıştırma olarak, son derste spin 1/2'de çalıştığımız presesyon örneğindeki beklenen değerlerin zaman içindeki değişim oranlarını türetmek için yukarıdaki gösterilen sonucu kullanabilirsiniz.

Korunum yasaları

H'a ait olasılık dağılımının zamandan bağımsız olması bağlamında, (genellikle enerji anlamına gelen) H'ın ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ kabul ederek) korunduğunu zaten görmüştük. Bir takım özel durumlarda, durağan durumlarda, enerji bütün zamanlar için kesinlik derecesinde bilinir ve diğer *tüm* olasılık dağılımları zamandan bağımsızdır. Ancak, tabii ki, durağan bir durum seçmeden enerji dışında korunan nicelikler elde etmek olasıdır. Sistemin başlangıç durumu ne olursa olsun, A gözlenebiliri, olasılık dağılımı zamandan bağımsız ise korunur, deriz. A'nın, ancak ve ancak H ile uyuşumlu ise, korunduğunu görmek zor değildir :

$$[A,H] = 0$$

İfadenin "ancak" kısmı aşağıdaki gibi ispatlanır. Eğer sıradeğişim sıfır ise, enerji özvektörlerinin bazı A'nın özvektörleri olarak ta seçilebilir. O özvektörleri $|k\rangle$ ile belirtelim, burada

$$A|k\rangle = a_k|k\rangle, \qquad H|k\rangle = E_k|k\rangle.$$

Daha önce olduğu gibi, başlangıç durumu

$$|\psi, t_0\rangle = \sum_k c_k|k\rangle$$

şeklinde açılabilir. Burada $|c_k|^2$, A ve/veya E (ile temsil edilen) gözlenebilirin ölçümünde a_k ve/veya E_k elde etme olasılığıdır. Baz H'nın özvektörleri ile inşa edildiği için elimizde hala

$$|\psi, t\rangle = \sum_k c_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k(t-t_0)}|k\rangle$$

var ve burada

$$|c_k e^{-\frac{i}{\hbar}E_k(t-t_0)}|^2 = |c_k|^2$$

t anında a_k bulma olasılığıdır. Böylelikle A için olasılık dağılımı zamandan bağımsızdır.

İfadenin "ve ancak" kısmı aşağıdaki gibi ispatlanır. Eğer A için olasılık dağılımı zamandan bağımsız olacaksa az önceki bölümün sonuçlarını kullanarak, muhtemel tüm $|\psi, t_0\rangle$ başlangıç durum vektörleri için

$$\langle\psi, t_0|[A, H]|\psi, t_0\rangle = 0$$

elde etmemiz gerektiğini not edin. Daha önce dile getirdiğimiz gibi, eğer bir kompleks Hilbert uzayı üzerinde bir işlemci yok olan köşegen matris elemanlarına sahip oluyorsa, bu sıfır işlemcisidir.

Zaman-Enerji Belirsizlik İlkesi

(Zamandan bağımsız bir Hamilton işlemcisine ait) Enerji özvektörlerinin durağan durumlar tanımladığını gördük, öyle ki eğer enerji bir anda kesinlik derecesinde biliniyorsa, bu durum tüm zamanlarda değişmezdir, yani bütün olasılık dağılımları zamandan bağımsızdır. Sistemin fiziksel nitelikleri zaman içinde, sistemin başlangıç durumu farklı enerjilerle enerji özvektörlerinin bir üstüste gelişi olması kaydıyla, evrilir. Kuşkusuz ki, böyle bir başlangıç durumunda enerji, "kesinikle" bilinmez, daha ziyade basit olmayan bir olasılık dağılımına sahiptir. Bundan dolayı, enerjinin istatistiksel belirsizliği, gözlenebilirlerin (olasılık dağılımlarının) zaman içinde değişim oranına bağlıdır. Ünlü olmayan *zaman-enerji belirsizlik prensibi* verilen bir (başlangıç) durumunun dikkate değer bir değişimine ait Δt zaman ölçeğini, bu durumdaki ΔE istatistiksel enerji belirsizliğine (diğer yanıltıcı sloganlara rağmen) ilişkilendirir. Bu belirsizlik ilkesinin,

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar$$

formunu almasına rağmen, örneğin, konum-momentum belirsizlik ilkesinden farklı olduğunu göreceksiniz.

Devam edecek...