Ders 11

Metindeki ilgili bölümler §1.7, 2.1

Çarpım gözlenebilirler

Tensör çarpım kuruluşu ile bileşik bir sisteme ait Hilbert uzayını nasıl inşa edeceğimizi gördük. Şimdi artık gözlenebilirleri nasıl kuracağımızı görelim. A_1, 1. sistem için bir gözlenebilir olsun ve B_2 de 2. sistem için bir gözlenebilir olsun. Bileşik sisteme ait ilgili gözlenebilirleri aşağıdaki gibi tanımlarız. Aşağıdaki doğrusal işlemcileri çarpım vektörleri üzerinde düşünün :

$$A_1 \otimes I|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = (A_1|\alpha\rangle) \otimes |\beta\rangle, \quad I \otimes B_2|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = |\alpha\rangle \otimes (B_2|\beta\rangle).$$

Durumu bir çarpım bazında açarak ve işlemcilerin doğrusallığını talep ederek bu işlemcilerin tanımlarını genel durumlara genişletiyoruz. Bu şekilde tanımlanan, bu işlemciler Hermitesel'dir. Dahası, bunlar sıradeğişmelidir (güzel alıştırma!) :

$$[A_1 \otimes I, I \otimes B_2] = 0,$$

ki bu, bileşik sistemin bünyesindeki altsistem gözlenebilirlerinin hala istatistiksel bir kesinlik derecesinde belirlenebileceği anlamına gelir. Örneğin, eğer 2 parçacığa bakıyorsak, hem 1. parçacığın konumunun ve hem de 2. parçacığın momentumunun arzu edilen istatistiksel doğrulukla tespit edilebilmesi mümkündür. Benzer şekilde, 1-d modelimizden 3-d'de hareket eden bir parçacığa ait bir model kurmak için bu yapıyı kullanırken tüm konum gözlenebilirlerinin kendi aralarında sıradeğişmeli olduğu ve tüm momentum gözlenebilirlerinin de kendi aralarında sıradeğişmeli olduğu sonucuna ulaşıyoruz. Şüphesiz ki, altsistemlerde elde edilen bu sıradeğişim bağıntıları bileşik sistemde ortaya çıkıyor.

Alıştırma

Eğer $[A_1, B_1] = C_1$ ise o zaman

$$[A_1 \otimes I, B_1 \otimes I] = C_1 \times I,$$

olduğunu ve 3-d'de bir parçacık için elde edilen kanonik sıradeğişim bağıntılarının genellemesinin böylelikle açıklandığını gösterin.

Birçok kaynakta, altsistem işlemcilerinin bileşik sisteme genişletilmesi gösterilirken $\otimes I$ veya $I\otimes$ faktörlerinin basitçe düşürülmesinin alışılagelmiş olduğunu lütfen not alın. Aslında, $\otimes$ sembolünün tamamen düşürülmesi de yaygındır!

Ayrıca, sistemin her gözlenebilirinin yukarıdaki formda olmadığını dikkate alın. Herzaman olduğu gibi, herhangi bir kendine eşlenik işlemci bir gözlenebiliri temsil edebilir. Böylece, her iki altsistemin de tekbaşına gözlenebiliri olmayan, bileşik sisteme bir bütün olarak (örneğin, toplam enerji) işaret eden gözlenebilirler olacaktır.

2-d'de hareket eden bir parçacık örneğimize geri dönecek olursak, iki parçacığın herbiri için konum işlemcilerimiz var : $X \otimes I$ ve $I \otimes Y$. Örneğin,

$$X \otimes I|x, y\rangle = X \otimes I|x\rangle \otimes |y\rangle = x|x\rangle \otimes |y\rangle$$

elde ederiz. Bu işlemcilerin konum dalga fonksiyonları üzerine nasıl etkidiğini, görelim :

$$Y\psi(x, y) = \langle x, y|Y|\psi\rangle = y\langle x, y|\psi\rangle = y\psi(x, y),$$

burada

$$Y|x, y\rangle = y|x, y\rangle \Longrightarrow \langle x, y|Y = y\langle x, y|$$

kullandık. Benzer şekilde, momentumu tanımlayabiliriz. Örneğin, güzel bir alıştırma olarak

$$P_1\psi(x, y) = (\langle x| \otimes \langle y|)P_x \otimes I|\psi\rangle = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y)$$

olduğunu kontrol edebilirsiniz. (İpucu: P_x, $\langle x|$ üzerine sonsuz küçük dönüşümler aracılığıyla etki eder.)

Sadece sistemin bütünü üzerinde tanımlanabilen bir gözlenebilire bir örnek olarak, 1-d'de hareket eden iki parçacığın (denk şekilde, 2-d'de hareket eden bir parçacığın) toplam enerjisini düşünün.

$$H = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + V(X, Y).$$

Bu, konum dalga fonksiyonları üzerine şu şekilde etkir (alıştırma)

$$H\psi(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x, y) + V(x, y)\psi(x, y).$$

Dinamik: Schrödinger resmi

Kuantum dinamiğini formüle etmek için şimdi artık elimizde yeteri kadar araç var. Dinamik son postüla tarafından nitelendiriliyor : *Zaman gelişimi sürekli üniter bir dönüşümdür.* Sürekli üniter bir dönüşümün bir örneğini, elbette, daha yeni çalıştık : a kadar bir miktar öteleme. Gerçi, o uygulamada, a zaman ile özdeşleştirilmiyor. Dinamik evrilme fikri sistemin ölçülebilir yönlerinin zaman içinde değişmesidir.* Kuantum mekaniğinde seçilen herhangi bir zamanda

*Bizim için, zaman, dinamik olmayan, olayları sıralamanın *önsel* (peşinen doğru kabul edilen) bir yolu olarak, her eylemsiz referans sisteminde geçerli olacak şekilde Newtonyen formunda modellenecek. Özellikle, bu çerçevede, zaman, değeri kuantum sisteminin durumuna bağlı olan bir gözlenebilir olarak değil, bunun yerine bir çeşit özel parametre olarak ele alınır. Şüphesiz ki, burada pekçok ilginç mevzu var, fakat bunları bu derste daha fazla araştıramayacağız. Basit bir şekilde, uygun bir standartta zamansal bir referansın baştan ve son defa seçildiğini kabul ediyoruz.

sistemin karakterizasyonu, o zamanda tüm gözlenebilirlere ait olasılık dağılımlarının bütünlüğü olarak görülebilir. Zaman gelişimi, bundan dolayı, olasılık dağılımlarında zamanla başkalaşan bir değişime karşılık geliyor olmalıdır. Daha önceden not ettiğimiz gibi, tüm olasılık dağılımları uygun gözlenebilirlerin (örneğin, karakteristik fonksiyonlar, v.b) beklenen değerleri alınarak hesaplanabilir. Bu yüzden, zaman gelişimi beklenen değerlerin gelişimi olarak tanımlanabilir. Oyunun kuralları, bir A gözlenebiliri verildiğinde beklenen değerin

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle,$$

yoluyla hesaplanması gerektiğini söyler, burada $|\psi\rangle$ Hilbert uzayında sistemin durumunu temsil eden bir birim vektördür, A ise bu gözlenebiliri temsil eden işlemcidir. Şimdi, bunu zaman başkalaşırken yapmayı düşünüyoruz. Zamanın herbir anında, fiziksel tahminler, mesela beklenen değerler aracılığıyla, yapmak için kullanılabilecek bir işlemciler ve vektörler sistemi bulmaya ihtiyacımız var. Stratejimiz, tüm zamanlar için tek bir Hilbert uzayımız olduğunu, fakat durumların ve gözlenebilirlerin matematiksel tanımınının zamanla değişmesine izin verdiğimizi, kabul etmek olacaktır. Beklenen değerlerin zamanla nasıl değiştiğini matematiksel olarak tasvir etmek için birkaç seçeneğimiz vardır. Böyle iki seçenek çoğunlukla elverişlidir. İlki, $|\psi\rangle$ vektörü tüm zamanlar için sabit olacak şekilde, gözlenebiliri temsil eden işlemcinin zamanla değişmesine izin verebiliriz. Dinamiği bu bakış açısıyla görmek *Heisenberg resmi* olarak adlandırılır, bunu daha sonra tartışacağız. *Schrödinger resmi* olarak bilinen dinamiğe bakmanın bir diğer yolu, $|\psi\rangle$ vektörünün zamanla değişmesine izin verirken gözlenebilirilerin işlemci temsilcilerini zaman içinde sabit tutmaya dayanır. Bu ikisi arasında sonsuz farklı "resim" vardır. Dinamik üzerindeki postülaya ilk olarak Schrödinger resmi cihetinden bakacağz.

Schrödinger resmi: Zaman gelişimi işlemcisi

Uzaysal ötelemelerle yaptığımıza çok benzer şekilde, t zamanında $|\psi, t\rangle$ ile gösterilen durum vektörünün daha önceki bir t_0 zamanındaki bir duruma sürekli, üniter bir dönüşümle bağlı olduğunu kabul ediyoruz. Bundan dolayı,

$$|\psi, t\rangle = U(t, t_0)|\psi, t_0\rangle$$

yazarız. Burada, $|\psi, t_0\rangle$, prensip olarak, herhangi bir birim vektör olabilir. U üniterdir, böylece zaman ilerledikçe durum vektörü boylandırılmış olarak kalır :

$$\langle\psi, t|\psi, t\rangle = \langle\psi, t_0|U^\dagger U|\psi, t_o\rangle = \langle\psi, t_0|\psi, t_0\rangle = 1.$$

(Kompleks bir Hilbert uzayında (bağlı) bir işlemcinin, ancak ve ancak tüm matris elemanları yok olduğunda, sıfır olacağını göstermek zor değildir (alıştırma). $|\psi, t_0\rangle$ rastgele olduğundan durum vektörünün ancak ve ancak $U^\dagger = U^{-1}$ ise, yani U üniter ise boylandırılmış olarak kalacağını görüyoruz.) Verilen,

$$U^\dagger(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0),$$

için doğal olarak ters dönüşümü t'den geri t_0'a zaman gelişimi olarak ilişkilendiririz, öyle ki,

$$U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t).$$

Sonuçta, t_0'dan t'ye olan zaman gelişimi, $t_0 < t_1 < t$ ile t_0'dan t_1'e ve sonra t_1'den t'ye zaman gelişimi olarak görülebilir, böylece

$$U(t, t_1)U(t_1, t_0) = U(t, t_0).$$

U işlemcisi *zaman gelişimi işlemcisi* olarak adlandırılır. Kuantum mekaniği kullanarak dinamik çalışmadaki ana mesele zaman gelişimi işlemcisinin yapısını aydınlatmaktır. Genel olarak konuşursak, doğrudan bir tarzda ilerlendiğinde bunu yapmak kolay değildir. Herşeyden önce, herhangi bir başlangıç durumunu nasıl evireceğini bildiğini düşünürsek zaman gelişimi işlemcisi oldukça komplike bir cisim olmak zorundadır. Lie'ye dayanan fiziğin/matematiğin derin bir prensibi şöyledir. Sürekli dönüşümleri göz önüne alırken her zaman sonsuz küçük dönüşümlerle çalışmak daha kolaydır. Bunun nedeni, sonlu dönüşümün sonsuz küçük dönüşüm tarafından tamamen nitelendirilmesidir, ki bu sonlu dönüşümden çok daha basit bir yapıdadır. Dinamik gelişimin (ister Newton dinamiğinde, akışkanlar mekaniğinde, elektrodinamikte, v.b. olsun) çoğunlukla diferansiyel denklemlerle ifade edildiğini bulmanızın sebeplerinden biri budur.

Bu yüzden, zaman gelişiminin, bir sürekli üniter dönüşüm olarak görülen, sonsuz küçük üretecini göz önüne alıyoruz. Birimsel zaman gelişiminin sonsuz küçük üreteci (klasik mekanikte, zaman içindeki harekete karşılık gelen kanonik bir dönüşümün üreteç fonksiyonu olan Hamilton işlemcisi ile benzeşik biçimde) *Hamilton işlemcisi* olarak adlandırılan bir gözlenebilirdir. Normal olarak, Hamilton işlemcisi enerjiyi temsil eder, ki bu, H'ın zamana bağlı olmaması şartıyla korunur. Doğrusu, tıpkı momentumu uzaysal ötelemelerin üreteci olarak tanımladığımız gibi, Hamilton işlemcisi/enerji'yi zaman ötelemelerinin üreteci olarak *tanım*larız. Uzaysal ötelemelerde olmadığı şekilde burada meydana gelen bir incelik, Hamilton işlemcisi'nin zamana bağlı olabileceği, yani, zaman ile parametrize edilen bir işlemci ailesi olabileceğidir. Bu da uzaysal ötelemelerde kullandığımızdan biraz daha karmaşık bir analiz ister.