Ders 8

Metindeki ilgili bölümler §1.6

Momentum

Momumtuma kuantum mekaniğinde nasıl bakacağız? "Kütle kere hız" veya başka birşey mi olmalı? Kuantum mekaniğinde momentumun tanımına yaklaşımımız daha çok "momentum"un temel olarak ne olduğunu anlamaya dayalı olacak. Tanımımızı motive etmek için, "momentum" olarak anılan büyüklüğün ana fonksiyonunun kapalı bir sistem için korunuyor olmasından kaynaklandığını hatırlatayım. Böylece, etkileşimli sistemlerin hareketinin "momentum değiş-tokuşu" yoluyla olduğu anlaşılır. Bunun yanısıra, fizik yasalarının ve karşılık gelen korunum yasalarının simetrileri arasındaki yakın bağlantıyı hatırlayın. Özellikle, uzaysal ötelemeler altındaki simetri çizgisel momentumun korunumuna karşılık gelir. Mekaniğin klasik limitinin Hamiltonyen formülasyonunda momentumun, kanonik dönüşümler olarak görülen, ötelemenin sonsuz küçük üreteci olduğunu görünce bu karşılık gelme özellikle daha şeffaf hale gelir. Hamiltonyen çerçevesinde momentumun korunumu, Hamiltonyenin ötelemsel olarak değişmeyen yani, momentum ile üretilen kanonik dönüşümle değişmez olduğu ifadesi ile tespit edilir. Aynı mantığın kuantum mekaniğinde de geçerli olduğunu göreceğiz. Gerçekten de, günümüzde momentum, matematiksel olarak ötelemelerin üreteci şeklinde - tanım gereği - saptanıyor. Tüm bunların nasıl olduğunu görelim.

Parçacığın konumunun kesinlikle bilindiği (idealleştirilmiş) durumlarla temsil edilen (genelleştirilmiş) konum özvektörlerini tanımladıktan sonra T_a *öteleme işlemcisi*ni

$$T_a|a\rangle = |x + a\rangle$$

yoluyla tanımlayabiliriz. $|x\rangle$ Hilbert uzayını taradığı için, işlemciyi bu bağıntı tanımlar.

$$T_a T_b = T_{a+b}, \qquad T_0 = I$$

olduğunu not edin (alıştırma). Fiziksel olarak, bu işlemciyi, parçacığın durumunu alıp, parçacığın pozitif x yönünde bir a miktarınca taşındığı bir başka duruma dönüştüren işlemci olarak yorumlarız. Bu işlemcinin, durumları, durumlara dönüştürmesini istediğimiz için bunların birim boylarında kalmalarını şart koşmalıyız :

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|T_a^\dagger T_a|\psi\rangle$$

Bu koşulun (tüm vektörler için)

$$T^\dagger T = TT^\dagger = I, \Longleftrightarrow T^\dagger = T^{-1}$$

eşitliğine (burada düşürdüğümüz bütün a'lar için) mecbur bıraktığı gösterilebilir. Son bağıntıları sağlayan T işlemcisi *üniter*dir, deriz. Birimsel işlemcinin skaler çarpımları koruduğunu not edin (alıştırma).

Konum dalga fonksiyonu için

$$T_a\psi(x) = \langle x|T_a|\psi\rangle = \langle x-a|\psi\rangle = \psi(x-a)$$

elde ettiğimize dikkat edin (iyi alıştırma). Dolayısıyla, sistemi sağ tarafa a miktarınca taşımak dalga fonksiyonunun argumanını *sol*a kaydırır. Bunun anlamlı olduğunu görmek için, örneğin Gausyen dalga fonksiyonlu bir parçacık düşünün (alıştırma). T_a'nın üniterliği konum dalga fonksiyonu yoluyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x-a)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 = 1$$

şeklinde ifade edilir (alıştırma).

Yukarıda bahsettiğimiz gibi, momentum sonsuz küçük ötelemelerin üreteci olarak belirlenir. Böylece, bir sonsuz küçük T_ϵ, $\epsilon << 1$ ötelemesi düşünün. T_a'nın a'da sürekli olduğunu kabul ederek işlemciyi Taylor serisine açabiliriz

$$T_\epsilon = I - \epsilon\frac{i}{\hbar}P + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Bir işlemcinin Taylor serisine açılımının matematiksel tanımı makul miktarda bir tartışma gerektirir ki biz bunu keseceğiz. Bizim amacımız için açılımı, sadece, işlemcinin herhangi matris elemanın bu yolla açılabileceği manasında yorumlayabilirsiniz. Bu $-\frac{i}{\hbar}$ faktörü daha sonra kolaylık olsun diye yerleştirildi. Burada, P *sonsuz küçük ötelemelerin üreteci* olarak anılan doğrusal bir işlemcidir.* T'nin üniterliği ve sürekliliği P'nin kendine eşlenik olduğunu işaret eder. Hakikaten, $\mathcal{O}(\epsilon)$ terimlerini düşünerek kolayca

$$I = T_\epsilon^\dagger T_\epsilon = (I + \epsilon\frac{i}{\hbar}P^\dagger + \mathcal{O}(\epsilon^2))(I - \epsilon\frac{i}{\hbar}P + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \Longrightarrow P = P^\dagger$$

olduğunu görebilirsiniz (alıştırma). Aslında, P'nin kendine eşlenikliği T'nin üniter olması için de yeterlidir. Bu, T_a, sonsuz küçük dönüşümlerin sonsuz bir çarpımı olarak temsil edildiğinde görülebilir :

$$T_a = \lim_{N\to\infty}(I - \frac{i}{\hbar}\frac{a}{N})^N = e^{-\frac{i}{\hbar}P}$$

$A^\dagger = A$ iken e^{iA} formundaki herhangi bir işlemcinin üniter olduğunu kontrol etmek zor değildir (alıştırma). Böylece, P, parçacığın momentumu ile özdeşleştirdiğimiz bir gözlenebiliri temsil eder.

Kanonik sıradeğişim bağıntıları

Şimdi, konum ve momentum arasındaki sıradeğişim bağıntısını düşünüyoruz. Bu bağıntıyı, konum ve momentum işlemcileri arasındaki sıradeğişimi çalışarak ve sonra ötelemenin sonsuz

*Teknik olarak sonsuz küçük üreteç $-\frac{i}{\hbar}P$'dir ama P'yi sonsuz küçük üreteç olarak anmak - adet olduğu üzere - terminolojinin elverişli bir istismarıdır.

küçük olduğu limiti düşünerek türetebiliriz. Aşağıdaki hesaplamaları bir alıştırma olarak kontrol edin.

$$XT_\epsilon|x\rangle = (x+\epsilon)|x+\epsilon\rangle$$
$$T_\epsilon X|x\rangle = x|x+\epsilon\rangle.$$

Bu iki bağıntıyı birbirinde çıkararak, momentumun tanımını hesaba katarak ve devamlı ϵ'da birinci derecede çalışarak,

$$X(-\frac{i}{\hbar}P)|x\rangle - (-\frac{i}{\hbar}P)X|x\rangle = |x\rangle$$

elde ederiz (alıştırma). Bu – $|x\rangle$'in (genelleştirilmiş) baz olduğunu aklınızda tutun –

$$[X,P] = i\hbar I$$

olduğunu işaret eder. Bu bağıntı,

$$[X,X] = 0 = [P,P]$$

(aşikar) bağıntıları ile birlikte bir boyutta hareket eden paçacığın *kanonik sıradeğişim bağıntıları*nı oluşturur.

Bu sıradeğişim bağıntılarının bize konum ve momentumun *uyuşumsuz* gözlenebilirler olduğunu gösterdiğine dikkat edin. Böylelikle bunlar bir belirsizlik bağıntısını sağlarlar :

$$\langle \Delta X^2\rangle\langle \Delta P^2\rangle \geq \frac{1}{4}\hbar^2$$

Bu meşhur konum-momentum belirsizlik bağıntısıdır. Bu, X (veya P)'de dağılması çok küçük olan bir durum kurmak isterseniz, P (veya X)'de ki dağılmanın mutlaka büyük olacağını gösterir. Belirsizlik bağıntısının, ayrıca, konum ve/veya momentuma ait dağılmanın hiçbir zaman yok olamayacağını gösterdiğini de not edin! Ancak, bunlardan biri diğer gözlenebilirin yeterince büyük dağılmaya sahip olması koşulu ile oldukça küçük yapılabilir.

Bir türev olarak momentum

Şimdi, momentumun, konum dalga fonksiyonları üzerinde türev işlemcisi olduğu geleneksel temsilin nasıl ortaya çıktığını görmek kolaydır. Sonsuz küçük öteleme altında konum dalga fonksiyonudaki değişimi düşünün.

$$T_\epsilon\psi(x) = (I - \frac{i}{\hbar}P)\psi(x) = \psi(x-\epsilon) = \psi(x) - \epsilon\frac{d\psi(x)}{dx} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

elde ederiz. ϵ dereceli terimleri kıyaslayarak

$$P\psi(x) \equiv \langle x|P|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{d\psi(x)}{dx}$$

olduğunu görürüz. Şüphesiz, artık kanonik sıradeğişim bağıntılarının konum dalga fonksiyonu gösterimini kolaylıkla doğrulayabilirsiniz :

$$[X,P]\psi(x) = i\hbar\psi(x)$$