Ders 7

Metindeki ilgili bölümler §1.6

Sürekli ve/veya sınırsız değerli gözlenebilirler

Artık (relativistik olmayan) bir parçacığın kuantum mekaniksel tarifine dönmeye hazırız. (Spinsiz) bir parçacığı, bu modelde temel gözlenebilirler olan konum ve çizgisel momentum ile tamamen nitelendirilen bir sistem olarak tanımlayacağız. Bu, bütün gözlenebilirlerin, konumun ve momentumun fonksiyonları olduğu anlamına gelir. Konum ve momentum değişkenlerinin kesikli bir değerler kümesi alması (açısal momentumun ve - sıklıkla - enerjinin aldığı gibi) olası iken, bunun deneysel bir kanıtı halihazırda mevcut değildir. Bundan dolayı, bu gözlenebilirlerin sürekli, sınırsız değerler kümesi alabileceği bir model kuruyoruz. Açıkça, sürekli, sınırsız spektrumlu kendine eşlenik işlemciler kabul eden bir Hilbert uzayı tanımlamaya ihtiyacımız var. Bu özelliklerden hiçbiri sonlu boyutlu vektör uzaylarında mümkün değildir ve burada dolayısıyla sonsuz boyutlu ortama (yani, fonksiyon uzayları) girmek zorunda kalıyoruz. Bu temkinli olmamız gereken bazı matematiksel inceliklere yol açıyor. Bu tartışmamızda çok titiz olmamaya çalışacağım çünkü bu bizi alanımızdan çok uzaklara götürür. Ancak, size makul, - bir miktar formal olduğunda - anlaşılması kolay bir ele alış biçimi vermeye çalışacağım. İlk olarak, bu vaziyetin üstesinden gelmek için size bir reçete vereyim. Sonra, bu formal reçetenin işe yaramasını sağlayan (ve hatta nerede aldatıcı olduğunu gösteren) altta yatan matematiğin bir yorumunu vereyim.

Formal reçete

Sürekli, sınırsız $a \in \mathbb{R}$ değerler kümesi ile bir A gözlenebiliri tanımlamak istiyoruz. Yine A ile gösterilen bir kendine eşlenik doğrusal işlemcinin ve sürekli $|a\rangle$ vektörlerinin bir kümesinin varlığını

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

olacak şekilde varsayıyoruz. "A 'sürekli' bir spektruma sahiptir" deriz. Bu vektörler "delta fonksiyonu tarzında ortonormal" olmalıdır :

$$\langle a|a'\rangle = \delta(a, a').$$

Bunu, Kronecker delta ile yazılan herzamanki ortonormallik ifadesinin bir süreklilik genellemesi olarak düşünebilirsiniz. Bu $|a\rangle$ vektörleri bir baz oluşturacaktır, yani özdeşliğin sürekli bir ayrışımıdır :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} da |a\rangle\langle a|,$$

öyleki

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} da|a\rangle\langle a|\psi\rangle$$

yazabiliriz.

Altında yatan matematiğin, kelimelerin ifade etiğinden daha incelikli olduğu yerde tırnak işareti içine alarak şunu söyleyebiliriz. Bu a "özdeğerler"ini A ölçümü sonuçlarının olası değerleri, $|\alpha\rangle$ "özvektörleri"ni de A'nın kesinlikle a değerine sahip olduğu "durumlar" olarak yorumlarız. $|\langle a|\psi\rangle|^2 da$ skaleri A'nın $|\psi\rangle$ durumunda $[a, a + da]$ aralığında değer alma olasılığıdır. Özellikle, A gözlenebilirinin $[a_1, a_2]$ aralığında bir değerde bulunma olasılığı

$$P(A \in [a_1, a_2]) = \int_{a_1}^{a_2} da|\langle a|\psi\rangle|^2$$

ile verilir. O halde, $|\langle a|\psi\rangle|^2$'yi A'nın ψ durumundaki olasılık yoğunluğu olarak adlandırırız. A işlemcisinin sürekli spektrumla verildiğinde, soyut durum vektörünün

$$\psi(a) = \langle a|\psi\rangle, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} da|\psi(a)|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

kompleks değerli fonksiyonu ile tam olarak nitelenebileceğini görebiliriz. $\psi(a)$, $|\psi\rangle$ vektörünün $|a\rangle$ ile sağlanan "baz" doğrultusundaki "bileşeni"ni temsil eder. Bu, sütun vektörü gösteriminin sürekli benzeşiğidir! Böylece Hilbert uzayı karesi integrallenebilir $\psi(a)$ fonksiyonları ile tarif edilebilir. Kuşkusuz ki, bunu daha önce bir parçacığın konum ve momentum temsillerinde gördünüz.

İncelikler. Gerçek öyküye kısa bir bakış

Çok büyük bir kısım için, sürekli spektrumlu işlemcileri yukarıdaki formalizmi kullanarak sonlu-boyutlu Hilbert uzayında doğrusal işlemcileri yaptığımızın hemen hemen aynısı gibi ele alabilirsiniz. Bununla birlikte, sizi uyarmaya değen matematiksel incelikler ortaya çıkabilir.

Başlangıç olarak, bu $|a\rangle$ "özvektörleri" normları olmadığı için - $\delta(a, a)$ tanımsızdır! - Hilbert uzayının gerçekten elemanları değildirler. Bilindik bir örnekte bunu somut olarak görmek için 1-değişkenli karesi integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayında etkiyen tanıdık momentum işlemcisini (az sonra doğruluğu görülecek) düşünün :

$$p\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)$$

Bunun "özfonksiyonlar"ı

$$\phi(x) = Ne^{\kappa x}$$

formunda ve "özdeğerler"i $\dfrac{\hbar\kappa}{i}$'dir. κ'yı nasıl seçerseniz seçin,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|\phi(x)|^2 \to \infty$$

Bu, $\phi(x)$ aslında Hilbert uzayının bir elemanına karşılık gelmez, demektir. Bu zorluğun kaynağı p'nin sürekli spektrumu olduğu gerçeğinde bulunabilir.* Eğer $\kappa = ik$ ve k gerçel sayı olarak seçilirse formal reçetemiz çalışır.

Eğer bir gözlenebilirin spektrumu sınırsız ise bir başka zorluk daha ortaya çıkar : Hilbert uzayının elemanlarının tümü işlemcinin *tanım kümesi*nde değildir. Bu zorluk - yalnızca Hilbert uzayı sonsuz boyutlu iken olabilir - spektrumun kesikli veya sürekliliğinden bağımsız şekilde sonsuz olduğu her zaman ortaya çıkar. Bunu göstermek için, momentum işlemcisine dönelim. Bir kare dalga atmasının, boylandırılabilir bir dalga fonksiyonu olduğu ve bunun bir parçacığın Hilbert uzayının bir elemanı olduğu açıktır.* Bununla birlikte, bir kare dalganın "köşeler"de türevi tanımlı değildir. Dolayısıyla, bu işlemci etki ettirildikten sonra bir fonksiyon elde edilmez - sadece karesi integrallenebilir bir fonksiyon olarak kalsın. Kare dalga fonksiyonunun momentum işlemcisinin tanım kümesinde olmadığını söyleriz. Benzer şekilde konum işlemcisinin tanım kümesinde olmayan dalga fonksiyonları kurmak kolaydır. Örneğin,

$$\psi(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

fonksiyonunun x'in karesi integrallenebilir (boylandırılabilir) bir fonksiyonu olduğunu kolayca kontrol edebilirsiniz. Ancak, X işlemcisi böyle fonksiyonlara

$$X\psi(x) = x\psi(x)$$

yoluyla etki eder. Böylece, örneğimizde

$$X\psi(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

elde edilir ki bu, karesi integrallenebilir değildir. Yani bir parçacığın Hilbert uzayının elemanı değildir.

Sürekli ve/veya sınırsız spektrumlu gözlenebilirlerin daha sıkı incelenmesinde, bu mevzular şöyle ele alınır. Sınırlandırılmamış işlemcilerin kısıtlı bir tanım kümesi olduğu kabul edilir. Kendine eşlenik işlemcilerin tanımına işlemcinin ve eşleniğinin aynı tanım kümesine sahip olacağı şartı eklenir. Sınırsız spektrumlu bir gözlenebilirin tanım kümesi Hilbert uzayının "yoğun" bir alt kümesini oluşturur. Bu, her vektörün (Hilbert uzayındaki normuna göre) tanım kümesinin elemanlarınca yeterince iyi bir şekilde yaklaşık olarak ifade edilebileceği anlamına gelir. Eğer spektrum kesikli (sınırsız olduğunda) ise Hilbert uzayının özvektörlerinin bir ortonormal bazı bu yoğun tanım kümesi içinden bulunabilir. Eğer spektrum sürekli ise özvektörler Hilbert

*Elimizde hiçbir özvektör olmadığından "spektrum"u nasıl tanımlarız? Kabaca, A işlemcisinin spektrumu $A - \lambda I$ doğrusal işlemcisinin tersi olamayacak şekilde λ skalerlerinin kümesidir

*Fiziksel olarak, böyle bir dalga fonksiyonu, kare dalga fonksiyonunun yok olmadığı bölge içinde bir yerde kesinlikle olduğu bilinen bir parçacığı temsil eder. Örneğin, bu, sonlu boyutlu bir parçacık dedektörünün içinden geçtikten sonra parçacığın durumu olacaktır.

uzayında değildir ama "genelleştirilmiş özvektörler" dir. Bunlar Hilbert uzayının yoğun bir alt kümesi üzerinde doğrusal fonksiyonlar olan *dağılımlar*ın vektör uzayında yaşarlar. Böylece bu genelleştirilmiş özvektörlerin, kendi aralarında ve Hilbert uzayının tümüyle değil ama bu yoğun alt kümesinin elemanları ile tanımlanan bir "skaler çarpım"ları vardır. Sürekli spektrumlu kendine eşlenik işlemci, yukarıda formal reçetemizde belirtildiğine benzer şekilde genelleştirilmiş baz tanımlamak için kullanılabilen delta fonksiyonu boylandırımlı genelleştirilmiş özvektörler kümesi alır.

Eğer tüm bu matematiksel detay sizi biraz şaşkınlaştırıyorsa kendinizi kötü hissetmeyin. Size sadece hikayenin nasıl gittiğine dair muğlak ipuçları verdim. bütün, biribirini takip eden bir betimleme vermeye teşebbüs etmedim. Ancak, en azından inceliklerin nerede yattığını artık biliyorsunuz. Takiben, tüm formal işlemlerimiz yukarıda ipuçlarını verdiğim daha bütünsel bir matematiksel formülasyon içerisinde doğrulanacak.

Konum İşlemcisi

Bir parçacığın, ilgili gözlenebilirlerinin sadece konum ve momentum olduğu bir sistem olarak tanımlandığından zaten bahsetmiştik. Bu fikri kuantum mekaniğinde nasıl gerçekleştiriyoruz? Konum ve momentumu temsil eden kendine eşlenik işlemciler tanımlamamız lazım. Daha önce bahsedildiği gibi bunu, spektrum bütün gerçel sayılar üzerinden sürekli ve sınırsız olacak şekilde yapıyoruz. Jenerik A işlemcisini yaptığımız gibi formal olarak kurulabilen konum işlemcisi ile başlıyoruz. Konum işlemcisini X ve tayfsal değerleri x ile göstereceğiz, öyle ki

$$X|x\rangle = x|x\rangle$$

genelleştirilmiş $|x\rangle$ özvektörlerini elde edeceğiz. (Uygun bir yoğun tanım kümesinde) $X = X^\dagger$ olur. Konum dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \langle\psi|\psi\rangle.$$

ile tanımlanır. Bir vektör konum dalga fonksiyonu ile tamamen nitelenebilir. Bunun tersi de doğrudur. Konum dalga fonksiyonu sütun vektörünün sürekli bir biçimidir! Bir doğrusal işlemci, vektörleri vektörlere dönüştürür ve böylece dalga fonksiyonlarında dalga fonksiyonlarına bir doğrusal dönüşüm tanımlar - ve tarafından tanımlanır. Bu dönüşüm

$$\psi(x) \to A\psi(x) \equiv \langle x|A|\psi\rangle.$$

yoluyla hesaplanabilir. Özellikle, konum işlemcisi fonksiyonları fonksiyonlara

$$\psi(x) \to X\psi(x) = \langle x|X|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle = x\psi(x).$$

yoluyla dönüştürür. Burada

$$X|x\rangle = x|x\rangle \Rightarrow \langle x|X = x\langle x|.$$

kullandık.

$\psi(x)$ dalga fonksiyonu konum için *olasılık genliği*dir. Bu, $|\psi(x)|^2$'nin konum için olasılık yoğunluğu olduğu anlamına gelir. Bu da,

$$Prob(X \in [a,b]) = \int_a^b dx|\psi(x)|^2.$$

demektir. Birim vektör koşulunun, dalga fonksiyonlarının boylandırılmasına işaret ettiğini not edin :

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x)|^2.$$

Son olarak, $|x'\rangle$ genelleştirilmiş özvektörünün, parçacığın belirli konuma sahip olduğu bir "durum"u temsil ettiğini not ediyoruz. Formal olarak, bu durum için dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \langle x|x'\rangle = \delta(x, x').$$

olur. Tabii ki, bu dalga fonksiyonu - delta fonksiyonu tarzı dışında - boylandırılamaz. (Deneyin!)

Notlar : Yukarıdaki tüm sonuçların, aslında herhangi bir sürekli spektrumlu gözlenebilir için geçerli olduğunu not edin. Biz basitçe birini seçtik ve konumu temsil edip gösterimimizi buna göre uyarlamak için kullandık. Ayrıca, gelenek olduğu üzere bu seviyede materyali sunarken tanım kümelerini çok gevşek olarak ele aldık. Buradaki fikir, tanım kümelerinin yeterince sınırlandırılmış olduğunda yukarıda verilen formal işlemlerin anlamlı olacağıdır. Bu şeylerin yalnızca formal yapısını anlamaya çalışmadığımız için bu sınırlamalar genellikle açıkça yapılmaz. Kesin hesaplamalar yaparken bu tip şeylere genellikle daha fazla dikkat edilmelidir. Fakat bunları yapmadan ne kadar mesafe katedilebildiği hayret vericidir!